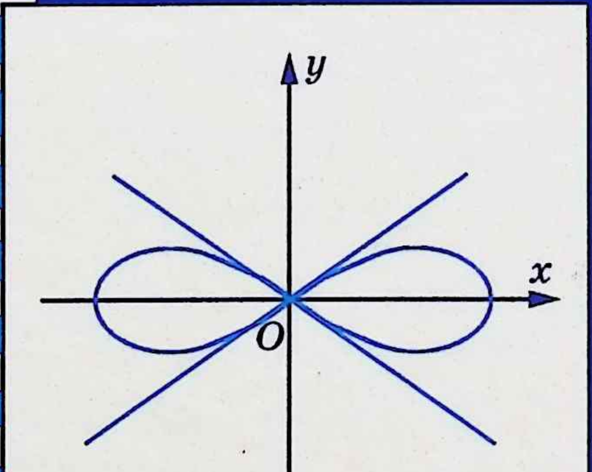
Югары белемне — татар телендә

И. Х. МӨДӘРРИСОВ
Ф. Г. МӨХЛИСОВ

МАТЕМАТИК АНАЛИЗДАН МӘСЬӘЛӘЛӘР ҖЫЕНТЫГЫ



ТАТАРСТАН
КИТАП
НӘШРИЯТЫ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАУНЫҢ ТӨП КАГЫЙДӘЛӘРЕ

1. Алгебраик сумманың чыгарылмасы һәм дифференциалы:

$$(u + v - w + \ldots + g)' = u' + v' - w' + \ldots + g',$$

$$d(u + v - w + \ldots + g) = du + dv - dw + \ldots + dg.$$

2. Тапкырчыгышның чыгарылмасы һәм дифференциалы:

$$(uv)' = uv' + u'v,$$

$$d(uv) = udv + vdu.$$

3. Функциянең даими тапкырлаучы белән чыгарылмасы һәм дифференциалы:

$$(Cu)' = Cu', \quad d(Cu) = Cdu.$$

4. Вакланманың чыгарылмасы һәм дифференциалы:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}, \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

5. Катлаулы функциянең чыгарылмасы һәм дифференциалы: әгәр дә $y = f(u)$ һәм $u = \varphi(x)$ булса, $\frac{dy}{dx} = f'(u)\varphi'(x)$ була.

ЭЛЕМЕНТАР ФУНКЦИЯЛӘРНЕҢ ЧЫГАРЫЛМАЛАРЫ ҺӘМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАРЫ ТАБЛИЦАСЫ

Функция	Чыгарылма	Дифференциал
x^n	nx^{n-1}	$nx^{n-1}\,dx$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}\,dx$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}\,dx$
e^x	e^x	$e^x\,dx$
a^x	$a^x \ln a$	$a^x \ln a\,dx$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}\,dx$
$\log_a x$	$\frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln a}$	$\frac{1}{x\ln a}\,dx$
$\lg x$	$\frac{1}{x}\lg e$	$\frac{1}{x}\lg e\,dx$
$\sin x$	$\cos x$	$\cos x\,dx$
$\cos x$	$-\sin x$	$-\sin x\,dx$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\cos^2 x}\,dx$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}\,dx$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{1+x^2}\,dx$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$-\frac{1}{1+x^2}\,dx$

И. Х. МӨДӘРРИСОВ, Ф. Г. МӨХЛИСОВ

МАТЕМАТИК АНАЛИЗДАН МӘСЬӘЛӘЛӘР ҖЫЕНТЫГЫ

Югары уку йортлары өчен
уку ярдәмлеге

КАЗАН • ТАТАРСТАН КИТАП НӘШРИЯТЫ • 2013

УДК 373.167.1:51(075.8)
ББК 22.161я73
М97

Рецензентлары:
профессор, физика-математика фәннәре докторы
Б. Г. Габделхәев
доцент, физика-математика фәннәре кандидаты
И. Г. Галәветдинов

Китап 2004—2013 елларга Татарстан Республикасы дәүләт телләрен һәм Татарстан Республикасында башка телләрне саклау, өйрәнү һәм үстерү буенча Татарстан Республикасы дәүләт программасын үтәү максатында нәшер ителә.

Охраняется Законом РФ «Об авторском праве и смежных правах». Воспроизведение всей книги или её части на любых видах носителей запрещается без письменного разрешения издательства.

Мөдәррисов, И. Х.

М97 Математик анализдан мәсьәләләр җыентыгы: югары уку йортлары өчен уку ярдәмлеге /И. Х. Мөдәррисов, Ф. Г. Мөхлисов.— Казан: Татар. кит. нәшр., 2013.— 231 б.: рәс. б-н.
ISBN 978-5-298-02518-8

Әлеге җыентык математик анализның барлык бүлекләрен үз эченә ала. Аның һәр бүлегендә теоретик белешмә, типик мәсьәләләрнең тулы аңлатмалы чишелешләре һәм ахырда, мөстәкыйль чишү өчен, мәсьәләләр һәм мисаллар бирелә.

Бу китап югары уку йортларында татар телендә белем алучы студентларга юлланса да, аннан шулай ук техникум студентлары, аспирантлар һәм укытучылар да файдалана ала.

УДК 373.167.1:51(075.8)
ББК 22.161я73

ISBN 978-5-298-02518-8

© Татарстан китап нәшрияты, 2013
© Мөдәррисов И. Х.,
Мөхлисов Ф. Г., 2013

КЕРЕШ

Математик анализ, аерым фән буларак, 330 ел элек барлыкка килә. Бу фәннең тарихы Г.В.Лейбниц тарафыннан 1684 елда басылган «...максимумнар һәм минимумнарның, шулай ук орынмаларның яңа методы һәм моны исәпләүнең махсус төре» исемле мәкаләсенә килеп тоташа.

Соңгы ике дистә елда, Россия Федерациясе һәм Татарстан Республикасы кабул иткән Халык мәгарифе турындагы Законга таянып, югары уку йортларында укыту-тәрбия эшләрен камилләштерү буенча зур эш алып барылды. Моңа ирешү өчен укыту формаларын һәм методларын камилләштерү чараларыннан киң файдаланырга кирәк. Шуларның барысын да истә тотып, бу китапта татар телендә югары белем алучы студентларга математик анализда өйрәнелә торган төшенчәләр, методлар һәм теорияне аңлы рәвештә үзләштерү өчен кирәк булган бик күп мисаллар һәм мәсьәләләрнең чишелешләре бирелде.

Тәкъдим ителә торган җыентык педагогика институтларының математика факультетларында укытыла торган математик анализ курсы программасына нигезләнеп төзелде.

Китап 15 бүлектән тора. Һәр бүлекне эчтәлеге буенча өч өлешкә бүләргә мөмкин. Беренче өлештә кыскача теория: төшенчәләр, билгеләмәләр, формулалар, теоремалар һ. б. бирелә. Икенче өлештә бирелгән теориягә караган мәсьәләләр һәм мисалларның чишү үрнәкләре китерелә. Өченче өлештә, мөстәкыйль чишү өчен, мәсьәләләр һәм мисаллар тәкъдим ителә. Китап ахырында бу мәсьәләләрнең җаваплары китерелә. Материалны шул рәвешле бер эзлеклелектә бирү өйрәнелә торган темаларда төп закончалыкларны күрә белү, белемнәрне гомумиләштерү күнекмәләре булдыруга ярдәм итәр дип уйлыйбыз.

Китапны язганда, студентка математик анализдан тиешле мәгълүмат биреп калу белән генә чикләнмичә, аның логик һәм математик фикерләү дәрәҗәсен үстерү, белем дәрәҗәсен киңәйтү төп максат итеп куелды.

Тәкъдим ителгән мәсьәләләр җыентыгы югары уку йортларында математик анализны татар телендә өйрәнүче студентлар өчен дә һәм шулай ук бу фәнне укытучы мөгаллимнәр өчен дә файдалы кулланма булыр дип өметләнәбез.

Авторлар

I бүлек

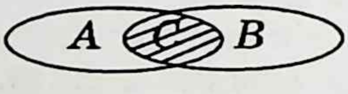
КҮПЛЕК ҺӘМ АНЫҢ БЕЛӘН ГАМӘЛЛӘР

1.1. Төп төшенчәләр

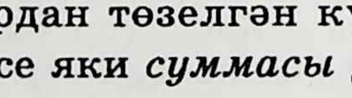
Математикада *күплек* төшенчәсе төп төшенчәләрнең берсе булып тора. Ләкин аңа төгәл билгеләмә биреп булмый, чөнки күплек, төп төшенчә буларак, башка гадирәк төшенчәләр аша билгеләнә алмый. Күплекне ниндидер предметларның берләшмәсе, җыелмасы кебек терминнар ярдәмендә аңлатырга, аның мәгънәсен мисаллар белән ачыкларга мөмкин. Күплекне хасил итүче предметлар аның *элементлары* дип атала.

1.2. Күплекләр белән гамәлләр

а) Безгә ике күплек A һәм B бирелгән булсын. A һәм B күплекләренең уртак элементларыннан һәм бары тик шул элементлардан гына торган яңа C күплеге бирелгән күплекләрнең *кисешмәсе* дип атала.



б) A һәм B күплекләренең иң кимендә берсенең элементы булган элементлардан төзелгән күплекне A һәм B күплекләренең берләшмәсе яки *суммасы* дип атыйлар.



$C=A\cup B$

в) A күплегенең B күплегенә кермәгән элементларыннан гына торган C күплеген ике күплекнең *аермасы* дип атыйлар.

$A\backslash B=C$

г) B күплеге A күплегенең кече күплеге $B \leq A$ булса, $A \backslash B$ күплеге B күплегенең A күплегенә *өстәмәсе* дип атала. Символик рәвештә $C_A B$ яки B'_A белән тамгалана.

д) Бер элементы да булмаган күплек *буш* күплек дип атала һәм $\varnothing$ символы белән тамгалана. Буш күплеккә мисал булып $x^2+1=0$ тигезләмәсенең реаль тамырлары тора.

Кайбер мәсьәлә һәм мисалларның чишелешен карап китик.

1. Әгәр A күплеге 9 га бүленүче икеурынлы саннардан, ә B күплеге цифрлары суммасы 9 га бүленүче икеурынлы саннардан торса, бу ике күплекнең суммасы 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99 элементларыннан төзелгән булыр, һәм ул символик рәвештә $A+B=\{18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 91, 99\}$ дип языла.

2. Әгәр A бөтен ромб күплеге булса, ә B — параллелограмнар, C — трапецияләр, D ромблар күплеге булса, ул вакытта $A \subseteq D \subseteq B \subseteq C$ була.

3. Әгәр A — барлык ромблар, B барлык турыпочмаклар күплеге булса, ул күплекләрнең кисешмәсе булып барлык квадратлар күплеге тора.

4. Әгәр A — төзек күппочмаклар күплеге, B барлык өчпочмаклар күплеге булса, андый күплекләрнең кисешмәсе булып $A \cup B$ төзек өчпочмаклар күплеге тора.

5. Әйтик, юл буйлап ике әти кеше, ике малай һәм оныгы белән бабай баралар, ди. Барысы ничә кеше бара дигән сорауга җавап итеп: өч кеше дип әйтү дөрес була.

6. A — җөп уңай саннар күплеге, B — уңай так саннар күплеге, ул вакытта $A \cup B$ барлык натураль саннар күплеге була.

7. A — кысынкыпочмаклы өчпочмаклар күплеге, B — турыпочмаклы өчпочмаклар күплеге, C — җәенке почмаклы өчпочмаклар күплеге булса, $A \cup B \cup C$ — барлык өчпочмаклар күплеге була.

8. A — натураль саннар күплеге, B — уңай так саннар күплеге булса, $C = A \backslash B$ аермасы уңай җөп саннар күплеге була.

9. A — аудиториядәге барлык студентлар күплеге, B шул ук аудиториядәге барлык ир-егетләр күплеге булса, $C = A\setminus B$ аермасы аудиториядәге кыз студентлар күплеге була.

10. $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, $B = \{1; 2; 3\}$ булса, $C = A\setminus B = \{4; 5\}$.

11. $A = \{4; 5; 6\}$, $B = \{1; 2; 3\}$ булса, $C = A\setminus B = \{4; 5; 6\}$.

Күнегүләр

1. 15 саныннан кечерәк булган барлык гади саннар күплеге элементларын язарга.

2. Квадраты 2 гә тигез булган рациональ саннар күплеген күрсәтергә.

3. Әгәр $A\subseteq B$ һәм үз чиратында $B\subseteq A$ булса, $A = B$ дип әйтеп буламы? Шуны исбатлагыз.

4. $A\setminus B = A$ яки $B\setminus A = B$ булганда, $A\cup B=\varnothing$ икәнлеген исбатлагыз.

5. $A=\{a; b; c; d\}$, $B=\{p; q; r,s,t\}$; $A\setminus B = ?$ $B\setminus A = ?$

6. Санлы күплекләрне аерып торучы сан нинди була?

7. $A=\left\{\dfrac{n^2}{n^2+1}\right\}$ һәм $B=\left\{\dfrac{2n^2+10}{n+4}\right\}$ күплекләрен аерып торучы кисемтәне табыгыз.

8. $A=\left\{\dfrac{n^2}{n^2+1}\right\}$ һәм $B=\left\{\dfrac{n^2+2}{n^2+1}\right\}$ күплекләрен аерып торучы санны табыгыз.

9. A — әйләнә эченә камалган төзек күппочмакларның периметрлары күплеге, B — әйләнәне камаучы төзек күппочмакларның периметры күплеге булса, $C = B\setminus A = ?$

10. A — түгәрәккә камалган төзек күппочмаклар мәйданы күплеге, B — түгәрәкне камаучы төзек күппочмаклар мәйданы күплеге булса, $C = B\setminus A$ ны табыгыз.

II бүлек

ФУНКЦИЯ ҺӘМ АНЫҢ ТӨП ТӨШЕНЧӘСЕ

2.1. Реаль саннар күплеге

Бөтен саннар һәм нуль белән берлектә вакланмалар *рациональ* саннар күплеген төзиләр. Рациональ саннар күплеге белән иррациональ саннар күплеге берләшмәсен *реаль* саннар күплеге дип атыйлар.

Архимед аксиомасы. Теләсә нинди ике уңай реаль x һәм y саннары өчен $nx > y$ булырлык натураль n санын табарга була:

$$\forall\ x, y \in R\ \exists\ n \in N,\ nx > y\ .$$

2.2. Санлы күплекләрнең чикләре

Теләсә нинди буш булмаган һәм өстән (астан) чикләнгән A күплегенең төгәл өске (аскы) чиге була. Төгәл чикләрне тиңдәшле рәвештә $\beta = \sup A$ (supremum), $\alpha = \inf A$ (infinum) дип тамгалыйлар.

2.3. Нокта тирәлеге

$]a-\delta; a+\delta[$ интервалын a ноктасының δ тирәлеге дип атыйлар һәм аны $\bigcup(a, \delta)$ дип тамгалыйлар. $x \in \bigcup(a, \delta)$ һәм $a-\delta < x < a+\delta$ язмалары бер үк нәрсәне аңлата. δ санын әйләнәнең *радиусы* дип атыйлар. $a-\delta < x < a+\delta$ тигезсезлеген $-\delta < x-a < \delta$ рәвешендә язарга була. Бу $|x-a| < \delta$ икәнлеген аңлата. Шулай итеп, $x \in \bigcup(a, \delta)$ урынына $|x-a| < \delta$ дип язарга мөмкин.

2.4. Санлы функцияләр

$X = \{x\}$ санлы күплеге бирелсен һәм һәр $x \in X$ санына тиңдәш итеп билгеле бер y саны куелсын. Ул вакытта X күплегендә $y = f(x)$ санлы функциясе бирелгән, диләр. x санын — аргумент яки бәйсез үзгәрешле, ә y ны бу аргументның функциясе дип атыйлар. Икенче төрле әйткәндә, санлы функция X санлы күплегенең реаль саннар күплегендәге чагылышы була.

X күплеге функциянең — *билгеләнү өлкәсе*, Y күплеге функциянең *кыйммәтләре өлкәсе* дип атала.

2.5. Функцияне бирү ысуллары

1. Аналитик ысул. Бу очракта, функциянең кыйммәтен табу өчен, x бәйсез үзгәрешлесе белән нинди гамәлләр башкарырга кирәклеген күрсәтүче формула бирелә.

Функция аналитик рәвештә бирелмәскә дә мөмкин. Чөнки функциянең билгеләнү өлкәсе аналитик аңлатманың билгеләнү өлкәсе белән бер үк булмаска мөмкин.

Бер үк функция санлы турының төрле кисәкләрендәге төрле аналитик аңлатмалар аша бирелергә мөмкин.

2. Таблицалар ысулы. Күп кенә очракларда аргументның нindiдер кыйммәтләре өчен функциянең тиңдәш кыйммәтләрен күрсәтәләр. Функцияне болай бирүнең шактый зур кимчелеге бар.

3. График ысул. $y=f(x)$, $x\in X$ функциясе графигы дип $M(x, f(x))$ нокталары күплеген атыйлар. Биредә x аргументының теләсә кайсы кыйммәте өчен $f(x)$ ның кыйммәтләрен табарга була.

2.6. Функцияләрне аларның үзлекләре буенча классификацияләү

1. Чикләнгән һәм чикләнмәгән функцияләр

Әгәр барлык $x\in X$ өчен $X=\{x\}$ күплегендә билгеләнгән $y=f(x)$ функциясенең кыйммәтләре $-M\le f(x)\le M$ тигезсезлеген канәгатьләндерерлек $M>0$ санын табып булса, $y=f(x)$ функциясе *чикләнгән* дип атала һәм кванторлар ярдәмендә түбәндәгечә күрсәтелә:

$$\exists M>0\ \forall x\in X:\left|f(x)\right|\le M.$$

$y=f(x)$ функциясенең кыйммәтләре X күплегендә чикләнмәгән булса, бу функция *чикләнмәгән* дип атала һәм аны болай язарга була:

$$\forall M>0\ \exists x\in X:\left|f(x)\right|>M.$$

2. Монотон функцияләр

Әгәр X күплегенә керүче теләсә нинди $x_1<x_2$ саннары өчен $f(x_1)<f(x_2)$ тигезсезлеге үтәлсә, $y=f(x)$ функциясе бу күплектә *үсүче функция* дип атала һәм болай языла:

$$\forall x_1, x_2\in X: x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2).$$

Кимүче функцияне дә шул рәвешле билгеләргә мөмкин. $y=f(x)$ функциясе ниндидер X күплегендә бары тик үсүче яисә кимүче генә булса, ул бу күплектә *монотон функция* дип атала.

3. Җөп һәм так функцияләр

Симметрик X күплегенең һәрбер кыйммәте өчен $f(-x)=f(x)$ тигезлеге үтәлсә, $y=f(x)$ функциясе бу күплектә *җөп функция* дип атала һәм түбәндәгечә языла:

$$\forall x \in X : f(-x)=f(x).$$

Симметрик X күплегендәге һәрбер кыйммәте өчен $f(-x)=-f(x)$ тигезлеге үтәлсә, $y=f(x)$ функциясе бу күплектә *так функция* дип атала һәм түбәндәгечә языла:

$$\forall x \in X : f(-x)=-f(x).$$

Җөп функциянең графигы ординаталар күчәренә, ә так функциянеке координаталар башлангычына карата симметрик була.

4. Периодик функцияләр

Әгәр X күплегенә һәр x саны белән бергә $(x+l)$ һәм $(x-l)$ саннары да керсә, ягъни ($x \in X \Rightarrow x+l \in X$ һәм $x-l \in X$) булса, X күплеге периоды l булган *периодик күплек* дип атала.

Гадәттә, функциянең барлык уңай периодлары арасыннан иң кечкенәсе була. Аны функциянең *төп периоды* дип атыйлар.

5. Функцияләрне аларның аналитик аңлатмалары буенча классификацияләү

Бөтен рациональ функцияләр (күпбуыннар)

Кыйммәтләре аргумент кыйммәтләре аша даими зурлыклар белән кушу һәм тапкырлау гамәлләре башкару нәтиҗәсендә табыла торган функцияләрне шулай атыйлар.

Вакланмалы рациональ функцияләр

Мондый функцияләрнең кыйммәтләре аргумент кыйммәтләре аша даими зурлыклар белән кушу, тапкырлау һәм бүлү гамәлләре башкару нәтиҗәсендә табыла.

Иррациональ функцияләр

Мондый функцияләрнең кыйммәтләре аргумент кыйммәтләре аша даими зурлыклар белән арифметик гамәлләр башкару һәм тамыр алу нәтиҗәсендә табыла.

Кайбер мәсьәлә һәм мисалларның чишелешен карап үтик.

1. $A=\left\{\frac{m}{n}\right\}$ күплеге ялгыз вакланмалар күплеге булса, аның төгәл чикләре буламы?

Чишү. Була. $\alpha=\inf A=0,\ \beta=\sup A=1$.

2. A — радиусы R булган әйләнәгә камалган барлык күппочмакларның мәйданнары күплеге булсын. Аның өчен түбәндәгеләр дөрес:

$$\alpha=\inf A=0,\ \beta=\sup A=\pi R^2.$$

3. Бирелгән $y=x^4\ (-\infty<x<\infty)$ һәм $y=x^4\ (-2\le x\le 2)$ функцияләре бер үкме?

Чишү. Юк. Чөнки аларның билгеләнү өлкәләре төрле. Беренче мисалда функциянең кыйммәтләре күплеге булып $[0;+\infty[$ нуры, ә икенчесендә $[0,\ 16]$ кисемтәсе тора.

4. $y=\begin{cases}0,\ x \text{ рациональ булса,}\\ 1,\ x \text{ иррациональ булса.}\end{cases}$

Биредә $y\left(\frac{3}{7}\right)=0,\ y\left(\sqrt{2}\right)=1,\ y(2)=0,\ y(\pi)=1$.

Бу очракта функциянең кыйммәтләре күплеге бары тик ике генә саннан тора, ә аның билгеләнү өлкәсе — санлы күчәр, ягъни барлык реаль саннар күплеге була.

5. Бирелгән $y=x^5$ функциясе $[-2;\ 3]$ кисемтәсендә билгеләнә, ә аның кыйммәтләре күплеге булып $[-32;\ 243]$ кисемтәсе тора.

Функция аналитик рәвештә бирелмәскә дә мөмкин: функциянең билгеләнү өлкәсе аналитик аңлатманың билгеләнү өлкәсе белән бер үк булмаска мөмкин.

6. Физикадан $p=\frac{RT}{V}$ Клапейрон формуласы безгә таныш. Биредә T — абсолют температура, V даими булса, p басымы T га бәйле функция була. Математик аңлатманың билгеләнү өлкәсе — T ның барлык реаль кыйммәтләре күплеге. Физика күзлегеннән караганда, билгеләнү өлкәсе булып T ның реаль уңай кыйммәтләре күплеге тора (абсолют температура тискәре була алмый).

7. Бер үк функция санлы турының төрле кисәкләрендәге төрле аналитик аңлатмалар аша бирелергә мөмкин. Берничә мисал карап китик.

а) Парашютчы, t_1 секунд иреклe төшеп, парашютын ача да t_2 секунд v_0 тизлеге белән җиргә якыная. Биредә парашютчының юлы вакытның төрле моментлары өчен төрле аналитик аңлатмалар аша бирелә:

$$s=\begin{cases}\dfrac{gt^2}{2}, & 0\le t\le t_1 \text{ булса},\\ \dfrac{gt_1^2}{2}+v_0(t-t_1) & t_1\le t\le t_1+t_2 \text{ булса}.\end{cases}$$

б) $$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, & x<0 \text{ булса},\\ 0, & x=0 \text{ булса},\\ 1, & x>0 \text{ булса}.\end{cases}$$

Биредә signum — x ның тамгасы. Мәсәлән,

$$\operatorname{sgn}(-3)=-1,\ \operatorname{sgn}\left(\sqrt{2}\right)=1,\ \operatorname{sgn}0=0.$$

в) $E(x)=n$ булса, $n\le x<n+1$. Биредә $E(x)$ — x ның бөтен өлеше. Мисал өчен, $E=\left(\sqrt{2}\right)=1$, чөнки $\sqrt{2}=1,41...$, $1\le\sqrt{2}<2$; $E(8,73)=8$, $E(9)=9$. Еш кына $E(x)$ урынына $[x]$ дип язалар. x ның вакланмалы өлешен $\{x\}$ дип тамгалыйлар. Мисал өчен, $\{3,18\}=0,18$; $\left\{7\frac{1}{3}\right\}=\frac{1}{3}$.

8. Теләсә нинди кәкре функция графигы була аламы?

Чишү. Юк. Мәсәлән, әйләнә — функция графигы түгел. Чөнки y лар күчәренә параллель итеп үткәрелгән теләсә нинди туры әйләнәне ике ноктада кисеп үтә. Шуңа күрә аны ике функция графигының берләшмәсе итеп карарга мөмкин:

$$y=\sqrt{R^2-x^2}\ \text{һәм}\ y=-\sqrt{R^2-x^2}.$$

9. $y=x^3$ функциясенең барлык санлы күчәрдә үсүен исбатларга.

Исбатлау. $x_1<x_2$ булсын. Ул вакытта

$$x_2^3-x_1^3=(x_2-x_1)(x_2^2+x_1x_2+x_1^2)=(x_2-x_1)\left[\left(x_2+\frac{x_1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x_1^2\right]>0.$$

Бу $x_1^3<x_2^3$ икәнлеген аңлата. Шуны исбатларга кирәк иде.

10. Симметрик X күплегендә бирелгән теләсә нинди $f(x)$ функциясен җөп һәм так функцияләрнең суммасы рәвешендә күрсәтеп буламы?

Чишү. Була. Дөрестән дә, $f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ рәвешендә язарга мөмкин. $f_1(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ булсын. Ул вакытта $f_1(-x)=\frac{f(-x)+f(x)}{2}=f_1(x)$. Димәк, $f_1(x)$ — җөп функция.

$f_2(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ функциясенең так функция булуы нәкъ шулай итеп исбатлана.

11. Симметрик $-\infty<x<\infty$ күплегендә бирелгән $y=x\sin^3x$ функциясе такмы яисә җөпме?

Чишү. $f(-x)=(-x)[\sin(-x)]^3=(-x)(-\sin^3x)=x\sin^3x=f(x)$. Димәк, бу — җөп функция.

12. $y=x-E(x)$ функциясе (биредә $E-x$ ның бөтен өлеше) периодик буламы?

Чишү. Бу функциянең периоды $l=1$ булган периодик функция икәнлеген күрсәтик:

$$f(x+1)=(x+1)-E(x+1)=x+1-E(x)-1=x-E(x)=f(x).$$

Димәк, функциянең периоды $l=1$.

13. Һәрвакытта да функциянең иң кечкенә уңай периоды буламы?

Чишү. Юк, булмый. Мәсәлән,

$$f(x)=\begin{cases}1, & x \text{ рациональ сан булса},\\ 0, & x \text{ иррациональ сан булса}.\end{cases}$$

l — рациональ сан булсын. Әгәр x рациональ сан булса, $x+l$ шулай ук рациональ була. Шуңа күрә $f(x)=f(x+l)=1$. Әгәр x иррациональ булса, $x+l$ шулай ук иррациональ була. Шуңа күрә $f(x)=f(x+l)=0$. Димәк, барлык рациональ l саннары $f(x)$ функциясенең периодлары була. Бу функциянең иң кечкенә уңай периоды юк.

КҮНЕГҮЛӘР

1. Нинди шартларда A күплегенең төгәл өске чиге була.
2. Санлы нинди күплекләр өчен $\inf A = \sup A$?
3. $\left\{\frac{n^2}{n^2+1}\right\}$ рәвешендәге вакланмалар күплеге A һәм $\left\{\frac{2n^2+10}{n+4}\right\}$ рәвешендәге вакланмалар күплеге B ны аерып торучы кисемтәне табыгыз.
4. $\left\{\frac{n^2}{n^2+1}\right\}$ рәвешендәге вакланмалар күплеге A белән $\left\{\frac{n^2+2}{n^2+1}\right\}$ рәвешендәге вакланмалар күплеге B ны аерып торучы санны табыгыз.

Функцияләрнең билгеләнү өлкәсен табыгыз:

5. $y = x^4 + x^3 + 2.$
6. $y = \frac{x-4}{\sqrt{x^2-x-2}}.$
7. $y = x - |x|.$
8. $y = \arcsin(2t-5).$
9. $y = \sqrt{E(x)-x} + 3x.$
10. $y = \lg\sin(t-3) + \sqrt{16-t^2}.$
11. $y = \arccos\frac{2t-5}{3} + \lg 2^t.$
12. $y = \frac{\sqrt{x}}{\sin\pi x}.$
13. $y = \sqrt{\sin\left(\sqrt{x}\right)}.$
14. $y = \arcsin(\sin x).$
15. $y = \frac{x}{\log(1-x)}.$
16. $y = |x| - x.$
17. $y = \frac{1}{\sqrt{|x|-x}}.$
18. $y = \frac{1}{\sqrt{x-|x|}}.$
19. $y = \sin\log\frac{1}{2x-1}.$
20. $y = \arcsin(2+3^x).$
21. $y = E(x).$
22. $y = \frac{x}{|x|}.$
23. $y = \frac{1}{x+|x|}.$
24. $y = \frac{x^2}{2|x|-3}.$
25. $y = \sqrt{-x^2}.$
26. $y = \sqrt{x^2(x-2)}.$
27. $y = \frac{3}{4-x^2} + \lg(x^3-x).$
28. $y = \lg\sin(x-3) + \sqrt{16-x^2}.$
29. $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{16-x^2}.$
30. $y = \lg(\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x}).$

31. $y=\lg\left[1-\lg(x^2-5x+16)\right]$.

32. $y=\sqrt{2+x-x^2}$.

33. $y=\sqrt{-x}+\frac{1}{\sqrt{2+x}}$.

34. $y=\sqrt{x-x^3}$.

35. $y=\arcsin\left(\lg\frac{x}{10}\right)$.

36. $y=\sqrt{\sin 2x}$.

Функцияләрнең җөпме яки такмы булуын ачыклагыз:

37. $y=4x^4-2x^2+5$.

38. $y=x-x^3$.

39. $y=\lg\frac{1+x}{1-x}$.

40. $y=\frac{x}{|x|}$.

41. $y=\frac{x^3-x}{1+x^2}$.

42. $y=tg(x-3)$.

43. $y=\log_a\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

44. $y=\cos(x+1)$.

45. $y=x+\sin x$.

46. $y=\frac{e^x+1}{e^x-1}$.

47. $y=|x+1|$.

48. $y=|x+1|+|x-1|$.

49. Исбатлагыз:

$f(x)$ һәм $\varphi(x)$ функцияләре бер үк симметрик X күплегендә бирелгән. Ул вакытта:

а) әгәр $f(x)$ һәм $\varphi(x)$ җөп функцияләр булса, аларның тапкырчыгышы $f(x)\cdot\varphi(x)$ шулай ук җөп функция була;

б) әгәр $f(x)$ һәм $\varphi(x)$ так функцияләр булса, аларның тапкырчыгышы җөп функция була;

в) әгәр $f(x)$ — җөп, $\varphi(x)$ так функция булса, аларның тапкырчыгышы $f(x)\cdot\varphi(x)$ так функция була.

Функцияләрнең монотонлык кисемтәсен табыгыз:

50. $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$.

51. $f(x)=2x^2-8x+16$.

52. $f(x)=|x|-x$.

53. $f(x)=E(x)$.

54. $f(x)=3^x$.

55. $f(x)=x^2+2x+5$.

56. $f(x)=\frac{1}{x^n}$.

57. $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$, $x\neq 1$.

58. $f(x)=\lg(x^2-6x+10)$.

59. $f(x)=\frac{1}{1+\sin^2 x}$.

60. $f(x) = x + \operatorname{arcctg} x$.

61. $f(x) = x + \arcsin x$.

62. $f(x) = \sin \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

63. $f(x) = \cos \dfrac{x^2}{1+x^2}$.

Функцияләрнең периодларын ачыклагыз:

64. $y = \sin x^2$.

65. $y = \{x\}$.

66. $y = \sin \pi x$.

67. $y = \cos \dfrac{x}{3}$.

68. $y = \cos \pi x$.

69. $y = 2^{\sin 4x}$.

70. $y = \operatorname{tg} \dfrac{x}{2} + \sin x$.

71. $y = x \cos x$.

72. $y = \sin \dfrac{1}{t}$.

73. $y = \sqrt{\operatorname{tg} x}$.

74. $y = \cos (x - 2)$.

75. $y = \arcsin(\sin x)$.

76. $y = \sin 4x + 5 \cos 6x$.

77. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

78. $y = \operatorname{tg}(x + \sin x)$.

79. $y = \sin(\cos x)$.

80. $y = \cos(\sin x)$.

81. $y = \sin^3 x + \cos^3 x$.

82. $y = \sin \sqrt{|x|}$.

83. $y = \sin x + \sin \sqrt{2x}$.

III бүлек

ЭЗЛЕКЛЕЛЕК

3.1. Эзлеклелек һәм аны бирү ысуллары

Натураль n санының һәркайсына a_n реаль саны тиңдәш итеп куелсын. Ул вакытта $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ *саннары эзлеклелеге* бирелгән, диләр. Эзлеклелекләрне буынлап кушарга, тапкырларга мөмкин. Эзлеклелекләрне аналитик, рекуррент, сөйләп аңлату юлы белән биреп була.

3.2. Эзлеклелекнең геометрик һәм физик мәгънәсе

Нинди дә булса җитәрлек кадәр зур номердан башлап, $\{a_n\}$ эзлеклелегенең буыннары a дан бик аз аерылып торса, a саны $\{a_n\}$ эзлеклелегенең *чикләмәсе* дип атала:

$$\forall \varepsilon>0\ \exists\ N>0\ \forall n\geq N \Rightarrow |a_n-a|<\varepsilon .$$

a ноктасының нинди генә ε тирәлеген алсак та, эзлеклелекнең N нчы номерыннан башлап, барлык буыннары бу тирәлеккә керә.

Үлчәү приборының ε сизгерлеге нинди генә булмасын, кайсыдыр N нан башлап, ул прибор a белән a_n ның аермасын сизә алмас.

3.3. Эзлеклелек чикләмәсенең үзлекләре

1. Эзлеклелекнең чикләмәләре саны бердән артык була алмый.

2. Эзлеклелекнең чикләмәсе булса, аның теләсә нинди чиксез кисәге шул ук чикләмәгә омтыла.

3.4. Чиксез кечкенә һәм чиксез зур эзлеклелекләр

Чикләмәсе нульгә тигез булган эзлеклелек *чиксез кечкенә эзлеклелек* дип атала:

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists\ N>0\ \ \forall n\geq N\ \Rightarrow\ |a_n|<\varepsilon .$$

Теләсә нинди $M>0$ өчен $n \geq N$ булганда, $|b_n|>M$ тигезсезлеге үтәлерлек $N>0$ саны табылса, $\{b_n\}$ эзлеклелеге *чиксез зур эзлеклелек* дип атала:

$$\forall M>0 \;\; \exists \;\; N>0 \;\; \forall n \geq N \;\; \Rightarrow \;\; |b_n|>M.$$

Кайбер мисалларның чишелешен карап үтик.

1. Мәктәптә эзлеклелекне бирүнең аналитик ысулы арифметик һәм геометрик прогрессияләргә карата кулланыла: $a_n=a_1+(n-1)d$ — арифметик прогрессиянең n нчы буыны формуласы, $b_n=b_1q^{n-1}$ — геометрик прогрессиянең n нчы буыны формуласы.

2. Эзлеклелекне рекуррент юл белән биргәндә, аның бер яки берничә беренче буынын күрсәтергә кирәк була. Фибоначчи саннары эзлеклелеге моңа мисал була ала:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2};$$

$$a_1=0, \;\; a_2=1, \;\; a_3=1, \;\; a_4=2, \;\; a_5=3, \;\; a_6=5, \;\; a_7=8, \;\; a_8=13, \; \ldots \; .$$

3. Сөйләп аңлату юлы. Бу очракта эзлеклелекне төзүнең кагыйдәсе телдән әйтелә.

Мәсәлән, $\sqrt{3}$ нең киме белән алынган унарлы якынча кыйммәтләре эзлеклелеге:

$$1; \; 1{,}7; \; 1{,}73; \; 1{,}732; \; \ldots \; .$$

π санының унарлы якынча кыйммәтләре эзлеклелеге:

$$3; \; 3{,}1; \; 3{,}14; \; 3{,}141; \; 3{,}1415; \; \ldots \; .$$

4. 1024 г радиоактив матдә булсын, ди. Тәүлек саен бу матдәнең яртысы таркала:

$$1024, \; 512, \; 256, \; 128, \; 64, \; 32, \; 16, \; 8, \; 4, \; 2, \; 1, \; \frac{1}{2}, \; \frac{1}{4}, \; \frac{1}{8}, \; \ldots \; .$$

Матдәне үлчәү өчен, сизгерлеге ε булган үлчәү алыйк.

$\varepsilon=100$ г өчен $N=5$ тәүлектән соң үлчәү матдәнең барлыгын күрсәтә алмас;

$\varepsilon=10$ г өчен $N=8$ тәүлектән соң үлчәү матдәнең барлыгын күрсәтә алмас;

$\varepsilon=1$г өчен $N=12$ тәүлектән соң үлчәү матдәнең булуын күрсәтә алмас.

Шулай итеп, үлчәүнең сизгерлеге нинди булуга карамастан, ничәдер тәүлек узганнан соң, үлчәү матдәнең булуын күрсәтә алмаячак, ягъни a белән a_n ның аермасын сизмәячәк.

5. Түбәндәге эзлеклелекләр үзләренең чикләмәләренә ничек омтылалар?

1) $\frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \ldots, \frac{n}{n+2}, \ldots \to 1$ — монотон үсеп,

2) $3, \frac{4}{2}, \frac{5}{3}, \frac{6}{4}, \ldots, \frac{n+2}{n}, \ldots \to 1$ — монотон кимеп,

3) $\frac{1}{3}, 3, \frac{2}{4}, \frac{4}{2}, \ldots, \frac{n}{n+2}, \frac{n+2}{n}, \ldots \to 1$ — чикләмә тирәсендә бер яктан икенче якка сикереп,

4) $3, 1, \frac{4}{2}, 1, \frac{3}{5}, 1, \ldots \to 1$ — чик кыйммәткә күп тапкыр ия булып чикләмәгә якынлаша.

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$ булганлыгын исбатларга.

Исбатлау. $\varepsilon > 0$ бирелгән булсын, ди. Аерманың абсолют зурлыгын карыйк:

$$|a_n - a| = \left|\frac{n^2}{n^2+1} - 1\right| = \left|\frac{-1}{n^2+1}\right| = \frac{1}{n^2+1}.$$

Табылган вакланма n үсү белән кими. Аның, ниндидер N нчы кыйммәтеннән башлап, алдан бирелгән теләсә нинди уңай ε нан кечкенәрәк була алуын күрсәтик. Бу N нчы кыйммәтне $\frac{1}{n^2+1} < \varepsilon$ тигезсезлеген чишеп табыйк:

$$n^2+1 > \frac{1}{\varepsilon} \;\Rightarrow\; n^2 > \frac{1}{\varepsilon} - 1;\; n^2 > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon};\; n > \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}.$$

$N > 0$ саны буларак, $N = E\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}\right)$ ны алырга була. Ул вакытта $n > N = E\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}\right)$ өчен $\left|\frac{n^2}{n^2+1} - 1\right| < \varepsilon$ тигезсезлеге үтәлә.

Ә бу $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=1$ икәнлеген аңлата. Безгә шуны исбатларга кирәк иде дә.

$\varepsilon=0,0001$ булган бер аерым очрак карап китик:

$$N=E\left(\sqrt{\frac{1-0,0001}{0,0001}}\right)=E\left(\sqrt{9999}\right)=99.$$

Бу 99 нчы номердан башлап, без тикшерә торган эзлеклелекнең барлык башка буыннарының 1 дән 0,0001 гә кимрәккә аерылып торуын аңлата.

7. n ∞ кә омтылганда, бирелгән $3, \frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, \ldots, 2+\frac{1}{n}, \ldots$ эзлеклелегенең чикләмәсе 2 гә тигез булганлыгын исбатларга.

Исбатлау. Эзлеклелекнең n нчы буыны $x_n=2+\frac{1}{n}$. Димәк, $x_n-2=\frac{1}{n}$. n ны бирелгән $\varepsilon>0$ өчен $\frac{1}{n}<\varepsilon$ тигезсезлеге үтәлерлек итеп алыйк. n ны шулай итеп сайлаганда, $|x_n-2|<\varepsilon$ була. Димәк, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

8. Бирелгән $x_{n+1}=\frac{2+x_n^2}{2x_n}$, $x_n>\sqrt{2}$, $x_1=2$ эзлеклелегенең чикләмәсе $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\sqrt{2}$ булганлыгын исбатларга.

Исбатлау.

$$\left|x_{n+1}-\sqrt{2}\right|=\left|\frac{2+x_n^2}{2x_n}-\sqrt{2}\right|=\left|\frac{2+x_n^2-2\sqrt{2}x_n}{2x_n}\right|=\left|\frac{\left(x_n-\sqrt{2}\right)^2}{2x_n}\right|=$$

$$=\left|\frac{x_n-\sqrt{2}}{2}\right|\cdot\left|\frac{x_n-\sqrt{2}}{x_n}\right|<\left|\frac{x_n-\sqrt{2}}{2}\right|, \text{ чөнки } \left|\frac{x_n-\sqrt{2}}{x_n}\right|<1.$$

Димәк, $\left|x_{n+1}-\sqrt{2}\right|<\left|\frac{x_n-\sqrt{2}}{2}\right|$. Бу тигезсезлектә n саны үскән саен, аерма иң кимендә икеләтә кими бара һәм чиксез кечкенәя. Ә бу $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$ булганлыгын исбатлый.

9. n ∞ кә омтылганда, бирелгән $\frac{7}{3}$, $\frac{10}{5}$, $\frac{13}{7}$, $\frac{3n+4}{2n+1}$, ... эзлеклелегенең чикләмәсе $\frac{3}{2}$ кә тигез булганлыгын күрсәтергә.

Чишү. Биредә $x_n - \frac{3}{2} = \frac{3n+4}{2n+1} - \frac{3}{2} = \frac{5}{2(2n+1)}$. n ниндидер кыйммәткә ия булганда, $\frac{5}{2(2n+1)} < \varepsilon$ тигезсезлеге үтәлер. Ягъни икенче төрле язсак, $2(2n+1) > \frac{5}{\varepsilon}$. Моннан $n > \frac{5}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}$. Димәк, әгәр $n > \frac{5}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}$ булса, $\left|x_n - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon$ була. $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \frac{3}{2}$ дип, икенче төрле язабыз. Әгәр $\varepsilon = 0{,}1$ дип алсак, $\left|x_n - \frac{3}{2}\right| < 0{,}1$ тигезсезлеге $n > 12$ булганда үтәлә. Әгәр $\varepsilon = 0{,}01$ дип алсак, $\left|x_n - \frac{3}{2}\right| < 0{,}01$ тигезсезлеге $n > 124$ булганда үтәлә. Әгәр $\varepsilon = 0{,}001$ дип алсак, $\left|x_n - \frac{3}{2}\right| < 0{,}001$ тигезсезлеге $n > 1249$ булганда үтәлә.

Ш у н ы д а и с т ә т о т а р г а к и р ә к: *чиксез зур эзлеклелек* төшенчәсен *чикләнмәгән эзлеклелек* төшенчәсе белән бутарга ярамый.

10. $1, -4, 9, -16, \dots, (-1)^{n-1} n^2 \dots$ эзлеклелеге чиксез зур эзлеклелек була.

11. $1, 0, 4, 0, 9, \dots, n^2, 0, \dots$.

Чишү. Бу эзлеклелек чикләнмәгән, чөнки аның буыннары теләсә нинди зур кыйммәтләр алырга мөмкин; ләкин ул чиксез зур эзлеклелек була алмый, чөнки аның, теләсә никадәр зур номерлы булып та, 0 гә тигез булган буыннары бар.

12. $-\frac{99}{9}, -\frac{92}{6}, -\frac{73}{1}, \frac{36}{6}, \dots, \frac{100-n^3}{n^2-10}, \dots, n \in N$ эзлеклелеге чикләнмәгәнлеген исбатларга.

Исбатлау. Гомуми буынының санаучысына да, ваклаучысына да рәвешүзгәртүләр кертеп, болай язабыз:

$$|x_n| = \frac{n^3\left|\frac{100}{n^3} - 1\right|}{n^2\left|1 - \frac{10}{n^2}\right|} = n\left|\frac{\frac{100}{n^3} - 1}{1 - \frac{10}{n^2}}\right|.$$

Хәзер без, n урынына теләсә нинди $n \geq 6$ санын куеп, $\frac{100}{n^3} < \frac{1}{2}$ һәм $1 - \frac{100}{n^3} > \frac{1}{2}$ булганлыгын күрәбез. Ә ваклаучысы $0 < 1 - \frac{10}{n^2} < 1$ була, шуңа күрә $|x_n| = n \cdot \frac{1-\frac{100}{n^3}}{1-\frac{10}{n^2}} > n \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{n}{2}$ була. n чиксез үскәндә, бу эзлеклелек чикләнмәгән була.

13. $\frac{5}{1!}, \frac{25}{2!}, \frac{125}{3!}, \ldots, \frac{5^n}{n!}, \ldots, n \in N$ эзлеклелегенең кайсыдыр буыннан башлап төгәл кимегәнен күрсәтергә.

Чишү. $n+1$ нче буыны $x_{n+1} = \frac{5^{n+1}}{(n+1)!}$. Янәшә торган ике буынның чагыштырмасын табабыз: $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{5^{n+1} n!}{(n+1)!5^n} = \frac{5}{(n+1)}$.

Күренгәнчә, $n \geq 5$ булганда, $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{5}{6} < 1$. $x_n > 0$ булганлыктан, $x_{n+1} < x_n$ була. Димәк, бишенче буыннан башлап, бирелгән эзлеклелек төгәл кими башлый.

14. Бернулли тигезсезлегенә таянып,

$$(1+1), \left(1+\frac{1}{2}\right)^2, \left(1+\frac{1}{3}\right)^3, \ldots, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \ldots\ n \in N$$

эзлеклелегенең төгәл үсүен исбатларга, биредә $(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha$, $\alpha > -1$, $\alpha \neq 0$, $n > 1$— натураль сан.

Исбатлау. Янәшә торган ике буынның чагыштырмасын табыйк:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+2)^{n+1} \cdot n^n}{(n+1)^{n+1}(n+1)^n} = \left(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n}.$$

Югарыда күрсәтелгән Бернулли тигезсезлеген кулланcак,

$$\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \geq 1 - \frac{n+1}{(n+1)^2} = \frac{n}{n+1}.$$

Шуңа күрә теләсә нинди $n \in N$ өчен дә $\frac{x_{n+1}}{x_n} > \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = 1$ яки $x_{n+1} > x_n$.

Димәк, бирелгән эзлеклелек төгәл үсә, ләкин ул өстән чикләнгән була.

15. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$ булса, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ яки $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ дигән нәтиҗә ясап буламы?

Чишү. Булмый. Мисал өчен, $\{a_n\}$: 1, 0, 1, 0, ... ; $\{b_n\}$: 0, 1, 0, 1, ... ; $\{a_n \cdot b_n\}$: 0, 0, 0, 0, ...

16. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = 0$. Моннан, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ булырмы?

Чишү. Булмас. Мисал өчен, $\{a_n\}$: 1, 0, 1, 0, 1, 0 ... эзлеклелегенең чикләмәсе юк; $\{b_n\}$: −1, 0, −1, 0, −1, 0, ... эзлеклелегенең чикләмәсе юк.

Ләкин $\{a_n + b_n\}$: 0, 0, 0, 0, ...

17. $x_{n+1} = \dfrac{2 + x_n^2}{2xn}$, $x_n > \sqrt{2}$, $x_1 = 2$ булганда, $x_n \to \sqrt{2}$ булганлыгын исбатларга.

Исбатлау. $x_1 = 2$; $x_2 = \dfrac{2 + 2^2}{2 \cdot 2} = \dfrac{6}{4} = 1,5$;

$$x_3 = \frac{2 + (1,5)^2}{2 \cdot 1,5} = \frac{4,25}{3} \approx 1,417; \quad x_4 = \frac{2 + (1,417)^2}{2 \cdot 1,417} \approx 1,442;$$

...

Күргәнебезчә, $x_n \to \sqrt{2}$. Шуны исбатлыйк. Аның өчен түбәндәге аерманы карыйбыз.

$$\left|x_{n+1} - \sqrt{2}\right| = \left|\frac{2 + x_n^2}{2x_n} - \sqrt{2}\right| = \left|\frac{2 + x_n^2 - 2\sqrt{2} \cdot x_n}{2x_n}\right| = \left|\frac{(x_n - \sqrt{2})^2}{2x_n}\right| =$$

$$= \left|\frac{x_n - \sqrt{2}}{2x_n}\right| \cdot \left|\frac{x_n - \sqrt{2}}{x_n}\right| < \left|\frac{x_n - \sqrt{2}}{2}\right|, \text{ чөнки } \left|\frac{x_n - \sqrt{2}}{x_n}\right| < 1.$$

Димәк, $\left|x_{n+1} - \sqrt{2}\right| < \left|\dfrac{x_n - \sqrt{2}}{2}\right|$. Ягъни n үскән саен, аерма кими бара һәм теләсә никадәр кими. Моннан $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$ икәне билгеле була.

Шуны исбатларга кирәк иде дә.

18. Әгәр $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x > 0$ булса, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{x}$ булганлыгын исбатларга.

Исбатлау. $\sqrt{x_n} - \sqrt{x} = \dfrac{(\sqrt{x_n}-\sqrt{x})(\sqrt{x_n}+\sqrt{x})}{\sqrt{x_n}+\sqrt{x}} = \dfrac{x_n - x}{\sqrt{x_n}+\sqrt{x}} =$

$= \dfrac{1}{\sqrt{x_n}+\sqrt{x}} \cdot (x_n - x) \Rightarrow 0$ $\dfrac{1}{\sqrt{x_n}+\sqrt{x}}$ — чикләнгән, $(x_n - x)$ — x чиксез кечкенә. Димәк, $\sqrt{x_n} = \sqrt{x}$, ягъни $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{x}$.

Шуны исбатларга кирәк иде дә.

КҮНЕГҮЛӘР

Беренче буыннары билгеле булган эзлеклелекләрнең гомуми буыннары формуласын языгыз:

84. $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots$.

85. $1, 3, 1, 3, 1, \dots$.

86. $5, 7, 11, 19, 35, \dots$.

87. $1, 2, 6, 24, 120, \dots$.

88. $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{5}{32}, \dots$.

Түбәндәге эзлеклелекләрнең чикләмәләре бармы? Булса, аларны табыгыз:

89. $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \dots, \frac{1}{3n}, \dots$.

90. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$.

91. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$.

92. $1, 0, \frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{3}, 0, 0, 0, \frac{1}{4}, \dots$.

93. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$.

94. $1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n-1}, \dots$.

95. $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, \dots$.

96. $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots, \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \dots$.

97. $\frac{1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{1}, \dots, \frac{1}{9}, \frac{1}{1}, \frac{1}{10}, \dots$.

98. $\frac{2}{3}, \frac{3}{6}, \frac{4}{11}, \dots, \frac{n+1}{n^2+2}, \dots$.

99. $\frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{n}{n+1}, \frac{n+1}{n}, \dots$.

100. n ∞ кә омтылганда, $\frac{1}{2}, \frac{5}{3}, \frac{9}{4}, \ldots, \frac{4n-3}{n+1}, \ldots$ эзлеклелегенең чикләмәсе 4 кә тигез булуын күрсәтегез.

101. n ∞ кә омтылганда, $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{2n-1}, \ldots$ эзлеклелегенең чикләмәсе чиксез кечкенә булуын күрсәтегез.

102. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2-3n}=-\frac{2}{3}$. Ничәнче буыннан башлап $\left|\frac{2n-1}{2-3n}-\left(-\frac{2}{3}\right)\right|$ зурлыгы 0,0001 саныннан кимрәк була?

103. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-1}{5n+1}=\frac{3}{5}$. Ничәнче буыннан башлап $\left|\frac{3n-1}{5n+1}-\frac{3}{5}\right|$ зурлыгы 0,0001 саныннан кимрәк була?

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ ны табыгыз.

104. $x_n=\dfrac{9+\frac{n}{n+1}}{2+\frac{1}{n}}$.

105. $x_n=\dfrac{3+0{,}5^n}{0{,}3^{n+1}+5}$.

106. $x_n=\dfrac{n}{3n+2}$.

107. $x_n=\dfrac{2-n}{n+1}+\dfrac{n\cdot 2^{-n}}{n+2}$.

108. $x_n=\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^5$.

109. $x_n=\dfrac{n^3+27}{n^4-15}$.

110. $x_n=\dfrac{(n+5)^3-n(n+7)^2}{n^2}$.

111. $x_n=\dfrac{n^2+1}{2n+1}-\dfrac{3n^2+1}{6n+1}$.

112. $x_n=\dfrac{(-1)^n+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}-(-1)^n}$.

113. $x_n=\dfrac{3n}{5+3^{n+1}}$.

114. $x_n=\dfrac{2^{n+2}+3^{n+3}}{2^n+3^n}$.

115. $x_n=\dfrac{5\cdot 2^n-3\cdot 5^{n+1}}{100\cdot 2^n+2\cdot 5^n}$.

116. $x_n=\dfrac{1+2+\ldots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}$.

117. $x_n=\dfrac{1+2+\ldots+n}{n^2}$.

118. $x_n=\dfrac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{4^n}}$.

IV *бүлек*

$y = f(x)$ ФУНКЦИЯСЕНЕҢ ЧИКЛӘМӘСЕ

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$ тигезсезлеге түбәндәгене аңлата: теләсә нинди $\varepsilon > 0$ өчен x N нан зуррак була башлагач, $|f(x) - b| < \varepsilon$ тигезсезлеге үтәлерлек $N > 0$ саны табыла:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\ N>0\ \forall x>N\ |f(x)-b|<\varepsilon.$$

4.1. Асимптоталар

а) Чикләнгән чикләмә $b = \lim_{x\to\infty} f(x)$ булса, x $+\infty$ кә омтылганда, $y = f(x)$ функциясенең графигы $y = b$ турысы белән тәңгәл килергә омтыла. $y = b$ турысын x $+\infty$ кә омтылганда, $y = f(x)$ функциясенең *горизонталь асимптотасы* дип атыйлар.

б) x чиксез зурлыкка омтылганда, $y = f(x)$ кәкресенең ноктасы белән $y = kx + b$ турысы арасындагы ераклык нульгә омтылса, $y = kx + b$ турысы $y = f(x)$ кәкресенең *авыш асимптотасы* дип атала. Биредә

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - (kx + b)\right] = 0.$$

Бу тигезлектән табабыз: $k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - kx\right)$.

4.2. x a га омтылганда, функциянең чикләмәсе

Коши билгеләмәсе. Әгәр теләсә нинди $\varepsilon > 0$ өчен $|x - a| < \delta$, $x \neq a$ тигезсезлегеннән $|f(x) - b| < \varepsilon$ тигезсезлеге килеп чыгарлык (ягъни $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$ булырлык) $\delta > 0$ саны табылса, b саны $f(x)$ функциясенең a ноктасындагы *чикләмәсе* дип атала:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ (\forall x \neq a);\ |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-b| < \varepsilon.$$

Коши билгеләмәсенә эквивалент булган Гейне билгеләмәсе дә бар.

Гейне билгеләмәсе. a ноктасында җыелучан теләсә нинди $x_1, x_2, \dots x_n, \dots$ эзлеклелеге өчен, биредә $x_n \neq a$, аңа тиңдәш функциянең кыйммәтләреннән торган $\{f(x_n)\}$ эзлеклелеге b га җыелса, b саны, x a га омтылганда, $f(x)$ функциясенең *чикләмәсе* дип атала.

4.3. Берьяклы чикләмәләр

x a га омтылганда, теләсә нинди $\varepsilon>0$ саны өчен $a-\delta<x<a$ тигезсезлегеннән $|f(x)-b|<\varepsilon$ тигезсезлеге килеп чыгарлык $\delta>0$ саны табылса, b саны $f(x)$ функциясенең *сул чикләмәсе* дип атала:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0\ \ \forall x\ \ a-\delta<x<a\ \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon.$$

Уң чикләмәне дә нәкъ шуңа охшатып билгеләргә мөмкин. Күп очракларда сул һәм уң чикләмәне $f(a-0)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$, $f(a+0)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ дип тамгалыйлар.

4.4. Чиксез зур чикләмәләр

Теләсә нинди $M>0$ өчен x ның барлык $|x-a|<\delta$, $x\neq a$ тигезсезлеген канәгатьләндерүче кыйммәтләре өчен $f(x)>M$ тигезсезлеге үтәлсә, x a га омтылганда, $f(x)$ функциясенең чикләмәсе $+\infty$ кә тигез була:

$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty .$$

4.5. Эквивалент чиксез кечкенә функцияләр. Чиксез кечкенә зурлыкның тәртибе

$\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ булса, $\alpha(x)$ функциясе $x=a$ өчен *чиксез кечкенә функция* дип атала. Әгәр $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$ булса, чиксез кечкенә $\alpha(x)$ һәм $\beta(x)$ функцияләре, $x=a$ булганда, эквивалент булалар. Ул вакытта $\alpha(x)\sim\beta(x)$ дип тамгалыйлар.

Чикләмәләрне тапканда, чиксез кечкенәләр эквивалентлыгы билгеләмәсеннән, x 0 гә омтылганда, $\sin x\sim x$, $\operatorname{tg} x\sim x$, $\ln(1+x)\sim x$, $e^x-1\sim x$, $\arcsin x\sim x$, $\operatorname{arctg} x\sim x$, $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$ эквивалентлыкларын куллану уңайлы.

Еш кына, чиксез кечкенәләр белән эш иткәндә, ике чиксез кечкенәнең кайсы нульгә тизрәк омтылганын ачыкларга кирәк була. $\alpha(x)$ һәм $\beta(x)$, x a га омтылганда, чиксез кечкенә булсыннар. Ул вакытта:

а) әгәр $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$ булса, $\alpha(x)$ ны $\beta(x)$ ка карата *югарырак тәртиптәге чиксез кечкенә* дип атыйлар;

б) әгәр $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$ булса, $\alpha(x)$ ны $\beta(x)$ ка карата *түбәнрәк тәртиптәге чиксез кечкенә* диләр;

в) әгәр $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{(x-a)^k}=c\neq 0$ булса, k санын $\alpha(x)$ *чиксез кечкенәсенең тәртибе* дип атыйлар.

Кайбер мәсьәләләрнең һәм мисалларның чишелешләрен карап китик.

1. $\lim\limits_{x\to 3}x^2=9$ икәнлеген исбатларга.

Исбатлау. Исбатлау өчен, безгә теләсә нинди $\varepsilon>0$ саны өчен $|x-3|<\delta$ тигезсезлегеннән, $|x^2-9|<\varepsilon$ килеп чыгарлык, $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ саны табып булганын күрсәтү җитә.

Андый δ ның ε ны сайлауга бәйле булганын ачыклыйбыз. Дөрестән дә, 3 ноктасының җитәрлек кадәр кечкенә δ тирәлегенә керүче x нокталарын карап китик: $|x-3|<\delta$, биредә $\delta<1$ дип карыйбыз. Ул вакытта:

$$|x+3|=|6+(x-3)|\leq 6+|x-3|<6+1=7\,.$$

Димәк, $|x-3|\cdot|x+3|<7\delta$.

Без $\varepsilon>0$ санын ирекле рәвештә алган идек, шуңа күрә аны $7\delta=\varepsilon$ дип алырга мөмкин. Моннан $\delta=\dfrac{\varepsilon}{7}$. 3 ноктасының δ тирәлеге нокталары өчен түбәндәге тигезсезлек үтәлә:

$$|x^2-9|=|x+3|\cdot|x-3|<\varepsilon\quad(\delta<1).$$

Шуңа күрә $\delta=\delta(\varepsilon)$ өчен $\left\{1;\dfrac{\varepsilon}{7}\right\}$ саннарының иң кечкенәсен алу җитә: $\delta=\min\left\{1;\dfrac{\varepsilon}{7}\right\}$.

Мәсәлән, $\varepsilon = 21$ булса, $\frac{\varepsilon}{7} = 3$ була. Ягъни $\delta = \min\{1; 3\} = 1$. Шулай итеп,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \ \delta_{\min} = \left\{1; \frac{\varepsilon}{7}\right\} \ : \ \forall \ x \in |x - \delta| \to |x^2 - 9| < \varepsilon.$$

Моннан $\lim\limits_{x \to 3} x^2 = 9$. Шуны исбатларга кирәк иде дә.

2. $\lim\limits_{x \to 4} \frac{x^2-16}{x-4} = 8$ икәнлеген исбатларга.

Исбатлау. Бирелгән $f(x) = \frac{x^2-16}{x-4}$ функциясен $x = 4$ тирәлегендә, әйтик, $(2; 5)$ интервалында карыйк. Ул вакытта $x \neq 4$ булганда, $|f(x) - 8| = \left|\frac{x^2-16}{x-4} - 8\right| = |x + 4 - 8| = |x - 4|$. Әгәр $x \in (2; 5)$ икәнлеген исәпкә алсак, түбәндәге тигезсезлек килеп чыга:

$$\left|\frac{x^2-16}{x-4} - 8\right| < x - 4\,.$$

Әгәр без $\delta = \varepsilon$ дип алсак, барлык $x \in (2; 5)$ өчен, $0 < |x - 4| < \delta$ тигезсезлеге үтәлгәндә, $\left|\frac{x^2-16}{x-4} - 8\right| < \delta = \varepsilon$ килеп чыга. Бу $\lim\limits_{x \to 4} \frac{x^2-16}{x-4} = 8$ булуын исбатлый.

3. $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$ икәнлеген исбатларга.

Исбатлау. Безгә теләсә нинди $\varepsilon > 0$ өчен, $|x - 2| < \delta$ булганда, $|x^2 - 4| < \varepsilon$ булырлык $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ саны булуын исбатларга.

Мондый δ ның ε ны сайлауга бәйле икәнлеген күрсәтик. 2 ноктасының җитәрлек кадәр кечкенә δ тирәлегенә керүче x нокталарын карап китик: $|x - 2| < \delta$, $(\delta < 1)$. Ул вакытта $|x + 2| = |4 + (x - 2)| \le 4 + |x - 2| < 4 + 1 = 5$. Димәк, $|x - 2| \cdot |x + 2| < 5\delta$. Безнең $\varepsilon > 0$ ирекле алынды, шуңа күрә $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$. Шулай булса, 2 ноктасының δ тирәлегенә керүче барлык x нокталары өчен $|x^2 - 4| = |x - 2| \cdot |x + 2| < \varepsilon$ тигезсезлеге үтәлер. Шуңа күрә $\delta = \min\left\{1; \frac{\varepsilon}{5}\right\}$ саннарының иң кечкенәсен

алу җитә. Мәсәлән, $\varepsilon=15$ булса, $\delta=\min\{1;3\}=1$. Әгәр $\varepsilon=0{,}1$ булса, $\delta=\min\{1;\ 0{,}02\}=0{,}02$. Шулай итеп,

$$\forall\ \varepsilon>0\quad \delta=\min\left\{1;\frac{\varepsilon}{5}\right\}\ \forall\ x\in\left|x-2\right|<\delta\rightarrow\left|x^2-4\right|<\varepsilon .$$

Димәк, $\lim\limits_{x\to 2}x^2=4$ булуын исбатладык.

4. $f(x)=\sin\dfrac{\pi}{x}$ функциясенең $x=0$ ноктасында чикләмәсе булмаганлыгын исбатларга.

Исбатлау. Исбатлау өчен, нульгә омтылучы ике эзлеклелек төзик:

$$1)\ \left\{x_n^{'}\right\}:\ 1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n},\ldots\to 0;$$

$$2)\ \left\{x_n^{''}\right\}:\ \frac{2}{5},\frac{2}{9},\frac{2}{13},\ldots,\frac{2}{4n+1},\ldots\to 0.$$

Аларга тиңдәш булган функция кыйммәтләре эзлеклелекләре:

$$1)\ \left\{f(x_n^{'})\right\}:\sin\pi,\ \sin 2\pi,\ \sin 3\pi,\ \ldots,\ \sin\pi n,\ \ldots\to 0;$$

$$2)\ \left\{f(x_n^{''})\right\}:\sin\frac{5\pi}{2},\ \sin\frac{9\pi}{2},\ \sin\frac{13\pi}{2},\ \ldots,\ \sin\frac{(4n+1)\pi}{2},\ \ldots\to 1.$$

Күргәнебезчә, функция кыйммәтләре эзлеклелекләре төрле саннарга омтыла. Бу хәл эзлеклелекнең чикләмәсе булмаганлыгын күрсәтә.

Бик күп очракта, чикләмәләрне тапканда,

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e,\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e,\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

формулаларыннан файдаланалар.

5. Бирелгән $f(x)=\dfrac{10^x-10^{-x}}{10^x+10^{-x}}$ функциясенең горизонталь асимптотасын табарга.

Чишү. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\frac{1}{10^{2x}}}{1+\frac{1}{10^{2x}}}=1;$

б) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{10^t-10^{-x}}{10^t+10^{-x}}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{10^{-t}-10^t}{10^{-t}+10^t}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\frac{1}{10^{2t}}-1}{\frac{1}{10^{2t}}+1}=-1.$

Мәсәлән, $\varepsilon = 21$ булса, $\frac{\varepsilon}{7} = 3$ була. Ягъни $\delta = \min\{1; 3\} = 1$. Шулай итеп,

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ \delta_{\min} = \left\{1; \frac{\varepsilon}{7}\right\}\ :\ \forall\ x \in |x - \delta| \to |x^2 - 9| < \varepsilon.$$

Моннан $\lim\limits_{x \to 3} x^2 = 9$. Шуны исбатларга кирәк иде дә.

2. $\lim\limits_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = 8$ икәнлеген исбатларга.

Исбатлау. Бирелгән $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$ функциясен $x = 4$ тирәлегендә, әйтик, $(2; 5)$ интервалында карыйк. Ул вакытта $x \neq 4$ булганда, $|f(x) - 8| = \left|\frac{x^2 - 16}{x - 4} - 8\right| = |x + 4 - 8| = |x - 4|$. Әгәр $x \in (2; 5)$ икәнлеген исәпкә алсак, түбәндәге тигезсезлек килеп чыга:

$$\left|\frac{x^2 - 16}{x - 4} - 8\right| < x - 4.$$

Әгәр без $\delta = \varepsilon$ дип алсак, барлык $x \in (2; 5)$ өчен, $0 < |x - 4| < \delta$ тигезсезлеге үтәлгәндә, $\left|\frac{x^2 - 16}{x - 4} - 8\right| < \delta = \varepsilon$ килеп чыга. Бу $\lim\limits_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = 8$ булуын исбатлый.

3. $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$ икәнлеген исбатларга.

Исбатлау. Безгә теләсә нинди $\varepsilon > 0$ өчен, $|x - 2| < \delta$ булганда, $|x^2 - 4| < \varepsilon$ булырлык $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ саны булуын исбатларга.

Мондый δ ның ε ны сайлауга бәйле икәнлеген күрсәтик. 2 ноктасының җитәрлек кадәр кечкенә δ тирәлегенә керүче x нокталарын карап китик: $|x - 2| < \delta$, $(\delta < 1)$. Ул вакытта $|x + 2| = |4 + (x - 2)| \leq 4 + |x - 2| < 4 + 1 = 5$. Димәк, $|x - 2| \cdot |x + 2| < 5\delta$. Безнең $\varepsilon > 0$ ирекле алынды, шуңа күрә $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$. Шулай булса, 2 ноктасының δ тирәлегенә керүче барлык x нокталары өчен $|x^2 - 4| = |x - 2| \cdot |x + 2| < \varepsilon$ тигезсезлеге үтәлер. Шуңа күрә $\delta = \min\left\{1; \frac{\varepsilon}{5}\right\}$ саннарының иң кечкенәсен

алу җитә. Мәсәлән, $\varepsilon=15$ булса, $\delta=\min\{1;3\}=1$. Әгәр $\varepsilon=0{,}1$ булса, $\delta=\min\{1;\ 0{,}02\}=0{,}02$. Шулай итеп,

$$\forall\ \varepsilon>0\ \ \delta=\min\left\{1;\ \frac{\varepsilon}{5}\right\}\ \forall\ x\in\left|x-2\right|<\delta\rightarrow\left|x^2-4\right|<\varepsilon.$$

Димәк, $\lim\limits_{x\to 2}x^2=4$ булуын исбатладык.

4. $f(x)=\sin\dfrac{\pi}{x}$ функциясенең $x=0$ ноктасында чикләмәсе булмаганлыгын исбатларга.

Исбатлау. Исбатлау өчен, нульгә омтылучы ике эзлеклелек төзик:

$$1)\ \left\{x_n^{'}\right\}:\ 1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots,\frac{1}{n},\dots\rightarrow 0;$$

$$2)\ \left\{x_n^{''}\right\}:\ \frac{2}{5},\frac{2}{9},\frac{2}{13},\dots,\frac{2}{4n+1},\dots\rightarrow 0.$$

Аларга тиңдәш булган функция кыйммәтләре эзлеклелекләре:

$$1)\ \left\{f(x_n^{'})\right\}:\sin\pi,\ \sin 2\pi,\ \sin 3\pi,\ \dots,\ \sin\pi n,\ \dots\rightarrow 0;$$

$$2)\ \left\{f(x_n^{''})\right\}:\sin\frac{5\pi}{2},\ \sin\frac{9\pi}{2},\ \sin\frac{13\pi}{2},\ \dots,\ \sin\frac{(4n+1)\pi}{2},\ \dots\rightarrow 1.$$

Күргәнебезчә, функция кыйммәтләре эзлеклелекләре төрле саннарга омтыла. Бу хәл эзлеклелекнең чикләмәсе булмаганлыгын күрсәтә.

Бик күп очракта, чикләмәләрне тапканда,

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e,\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

формулаларыннан файдаланалар.

5. Бирелгән $f(x)=\dfrac{10^x-10^{-x}}{10^x+10^{-x}}$ функциясенең горизонталь асимптотасын табарга.

Чишү. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\frac{1}{10^{2x}}}{1+\frac{1}{10^{2x}}}=1;$

б) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{10^t-10^{-x}}{10^t+10^{-x}}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{10^{-t}-10^t}{10^{-t}+10^t}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\frac{1}{10^{2t}}-1}{\frac{1}{10^{2t}}+1}=-1.$

Бу мисалда $x=-t$ дип куйгач, $x\to-\infty$, $t\to+\infty$. Димәк, $x\ -\infty$ кә омтылганда, кәкре $y=-1$ горизонталь асимптотасына, ә $x\ +\infty$ кә омтылганда, кәкре $y=1$ горизонталь асимптотасына якыная диләр.

6. $y=\dfrac{x^3+4x^2+3}{x^2+2}$ функциясенең авыш асимптотасын табарга.

Чишү. Санаучының дәрәҗә күрсәткече ваклаучының дәрәҗә күрсәткеченнән бер берәмлеккә зуррак. Шуңа күрә рациональ функциянең бөтен кисәген аерып чыгарырга мөмкин:

$$y=\frac{x^3+4x^2+3}{x^2+2}=(x+4)-\frac{2x+5}{x^2+2}\ .$$

x чиксезлеккә омтылганда, $\dfrac{2x+5}{x^2+2}$ вакланмасы чиксез кечерәя. Шуңа күрә $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+5}{x^2+2}=0$ булыр. Бу — геометрик яктан функция графигының x үсү белән бирелгән $y=x+4$ турысына бик якын килүен аңлата. Мондый очракларда $y=x+4$ турысын ***авыш асимптота*** дип атыйлар. Инде югарыда күрсәтелгән формула буенча тапканда:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4x^2+3}{x(x^2+2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4x^2+3}{x^3+2x}=1\ ;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+4x^2+3}{x^2+2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4x^2+3-x^3-2x}{x^2+2}=4\ .$$

Авыш асимптота тигезләмәсенә куйсак, $y=x+4$ килеп чыга.

7. $f(x)=\begin{cases}2^x;\ x<2,\\ x^2+1,\ x\ge 2\end{cases}$ функциясенең $x=2$ ноктасындагы берьяклы чикләмәләрен табарга. Бу ноктада функциянең чикләмәсе бармы?

Чишү. $f(2-0)=\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}f(x)=\lim\limits_{x\to2}2^x=2^2=4\ ;$

$$f(2+0)=\lim_{\substack{x\to2\\x>2}}f(x)=\lim_{x\to2}(x^2+1)=5\ .$$

Бу функциянең x 2 гә омтылганда чикләнгән берьяклы чикләмәләре бар. Ләкин алар төрле. Димәк, $x=2$ ноктасында функциянең чикләмәсе юк.

8. $y=3^{\frac{1}{x}}$ функциясенең x 0 гә омтылгандагы чикләмәсен табарга.

Чишү. а) Башта x ның 0 гә сул яктан омтылгандагы очрагын тикшерик.

x 0 гә омтылганда ($x<0$), $\frac{1}{x}$ нең чиксез зур булганлыгы ачык. Шуңа күрә $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} 3^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{x}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{+\infty}=0$;

б) Әгәр x нульгә уң яктан омтылса, $\frac{1}{x}$ плюс чиксезлеккә омтыла. Моннан $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} 3^{\frac{1}{x}}=3^{+\infty}=+\infty$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n=e^k$ булганлыгын исбатларга.

Исбатлау. $n=kx$ дип алмаштырсак, n ∞ кә омтылганда, x ∞ кә омтыла.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{kx}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^k=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^k=e^k.$$

Шул ук мисалны икенче юл белән дә чишәргә мөмкин:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{n}{k}}\right]^k=\left[\lim_{\frac{n}{k}\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{n}{k}}\right]^k=e^k.$$

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-3}{n+2}\right)^{2n+1}=e^{-10}$ булганлыгын күрсәтергә.

Чишү. Аңлатманың бөтен өлешен табыйк: $\frac{n-3}{n+2}=1-\frac{5}{n+2}$.

$-\frac{5}{n+2}=x$ дип тамгаласак, $x\to0$ һәм $2n+1=-\frac{10}{x}-3$ кә тигез була.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-3}{n+2}\right)^{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{5}{n+2}\right)^{2n+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+x\right)^{-\frac{10}{x}-3}=$$

$$=\left[\lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}\right]^{-10}\cdot\lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{-3}=e^{-10}\cdot 1=e^{-10}.$$

Катлаулырак чикләмәләрне тапканда,

$$\lim_{x\to x_0}\left[u(x)\right]^{v(x)}=\lim_{x\to x_0}e^{v(x)\ln u(x)}=\left[\lim_{x\to x_0}u(x)\right]^{\lim\limits_{x\to x_0}v(x)}.$$

формуласын киң кулланалар.

Гадәттә, $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=1$, $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=\infty$ булган аныксыз 1^{∞} очрагын чишү авырлык тудыра. Андый очракларда мисалларны исбатланган

$$\lim_{x\to x_0}u^{v}=\lim_{x\to x_0}\left\{\left[1+(u-1)\right]^{\frac{1}{u-1}}\right\}^{(u-1)v}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}(u-1)v}$$

очрагына кайтарып калдыралар.

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$ чикләмәсен табарга.

Чишү. Бу очракта $u=\dfrac{x^2+1}{x^2-2}$; $v=x^2$. Димәк,

$$(u-1)\cdot v=\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}-1\right)\cdot x^2=\frac{3x^2}{x^2-2}.$$

Шулай булгач, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2}{x^2-2}}=e^3$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$ чикләмәсен табарга.

Чишү. Биредә $u=\dfrac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}$; $v=\dfrac{1}{\sin x}$.

Димәк, $(u-1)\cdot v=\left(\dfrac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}-1\right)\cdot\dfrac{1}{\sin x}=\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{1+\sin x}\cdot\dfrac{1}{\sin x}$. Шулай

булгач, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{1+\sin x}\right)\cdot\frac{1}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\cos x(1+\sin x)}}=e^0=1$.

13. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^x-x^2}{x-2}$ чикләмәсен табарга.

Чишү. Чикләмәне табуга керешкәнче, без бирелгән функциягә рәвешүзгәртүләр кертик:

$$\frac{2^x-x^2}{x-2}=2^2\cdot\frac{2^{x-2}-1}{x-2}-2\cdot\frac{\left(1+\frac{x-2}{2}\right)^2-1}{\frac{x-2}{2}}.$$

Биредә $2^2\cdot\dfrac{2^{x-2}-1}{x-2}=2^2\ln 2,\ 2\cdot\dfrac{\left(1+\frac{x-2}{2}\right)^2-1}{\frac{x-2}{2}}=2^2=4$ булганлыгын

күрсәтүне укучының үзенә тапшырабыз. Шулай итеп,

$$\lim_{x\to 2}\frac{2^x-x^2}{x-2}=2^2\ln 2-2^2=2^2\ln\frac{2}{e}.$$

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x}$ $(k\neq 0)$ чикләмәсен табарга.

Чишү. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{k\sin kx}{kx}=k\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{kx}=k.$

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos 7x}{x^2}$ чикләмәсен табарга.

Чишү. Билгеле формуладан файдаланып,

$$\frac{\cos 3x-\cos 7x}{x^2}=2\cdot\frac{\sin 5x}{x}\cdot\frac{\sin 2x}{x}$$

дип яза алабыз. Шулай итеп, $2\cdot\left[\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\sin 5x}{5x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}2\dfrac{\sin 2x}{2x}\right]=20.$

Димәк, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos 7x}{x^2}=20.$

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ чикләмәсен табарга.

Чишү. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin\frac{x}{2}}{2\cdot\frac{x}{2}}\cdot\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{2\cdot\frac{x}{2}}=\dfrac{1}{2}.$

17. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\operatorname{ctg}2x\cdot\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$ чикләмәсен табарга.

Чишү. $\dfrac{\pi}{4}-x=y$ дип алыштыргач, y 0 гә омтылучан була.

Шуңа күрә

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \operatorname{ctg} 2x \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\lim_{y\to 0} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-2y\right)\cdot \operatorname{ctg} y=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\sin 2y}{\cos 2y}\cdot\frac{\cos y}{\sin y}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin 2y}{\sin y}\cdot\frac{\cos y}{\cos 2y}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin 2y}{\sin y}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\cos y}{\cos 2y}=2\cdot 1=2.$$

18. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$ чикләмәсен табарга.

Чишү. Бирелгән функцияне вакланма рәвешендә күрсәтеп, санаучысын да, ваклаучысын да $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}$ гә тапкырлыйбыз. Ул вакытта

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right]}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}}{\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\frac{0}{2}=0.$$

Димәк, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)=\frac{0}{2}=0$.

19. $\lim\limits_{x\to 10}\frac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x}$ чикләмәсен табарга.

Чишү. $\lim\limits_{x\to 10}\frac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x}=\lim\limits_{x\to 10}\frac{(x-10)(x^2+10x+100)}{x(x-10)^2}=$

$$=\lim_{x\to 10}\frac{x^2+10x+100}{x(x-10)}=\frac{300}{0}=\infty.$$

20. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}$ чикләмәсен табарга.

Чишү. Санаучысына берне кушабыз һәм берне алабыз. Моннан

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x(1+x)}-\frac{\sqrt[4]{1-2x}-1}{x(1+x)}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x(1+x)}-\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1-2x}-1}{x(1+x)}=$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt[3]{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right)}{x(1+x)\left(\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right)} -$$

$$- \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt[4]{1-2x}-1\right)\left(\sqrt[4]{(1-2x)^3}+\sqrt[4]{(1-2x)^2}+\sqrt[4]{1-2x}+1\right)}{x(1+x)\left(\sqrt[4]{(1-2x)^3}+\sqrt[4]{(1-2x)^2}+\sqrt[4]{1-2x}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1+x^2-1}{3x(x+1)} - \lim_{x\to 0} \frac{1-2x-1}{4x(x+1)} = 0 + \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

21. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[5]{(1+x)^3}-1}{x}$ чикләмәсен табарга.

Чишү. Бирелгән очракта яңа үзгәрешле кертү җайлырак була. Шуңа күрә $1+x=y^5$ дип алсак, x 0 гә омтылганда, $y \to 1$. Шулай итеп,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{(1+x)^3}-1}{x} = \lim_{y\to 1} \frac{y^3-1}{y^5-1} = \lim_{y\to 1} \frac{(y-1)(y^2+y+1)}{(y-1)(y^4+y^3+y^2+y+1)} = \frac{3}{5}.$$

22. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos x}{x^2}$ чикләмәсен табарга.

Чишү. Санаучының аргументына 1 не кушып, 1 не алабыз. Шуннан соң санаучысын да, ваклаучысын да $(\cos x-1)$ гә тапкырлыйбыз. $\cos x-1=y$ дип алмаштырсак һәм

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\cos x-1)}{\cos x-1} = \lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$$

булуын исәпкә алып, без чикләмәне түбәндәге рәвештә яза алабыз:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\cos x-1)}{\cos x-1} \cdot \frac{\cos x-1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x-1}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

23. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x + a\sin bx)^{\frac{1}{x}}$ чикләмәсен табарга.

Чишү. Бирелгән аңлатмага 1 не кушабыз һәм 1 не алабыз. Моннан чыгып, рәвешүзгәртүләр кертәбез:

$$\lim_{x\to 0}(\cos x + a\sin bx)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left[1+(\cos x + a\sin bx - 1)\right]^{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left\{\left[1+(\cos x + a\sin bx - 1)\right]^{\frac{1}{\cos x + a\sin bx - 1}}\right\}^{\frac{\cos x + a\sin bx - 1}{x}}.$$

Белгәнебезчә, $\lim_{x\to 0}\left[1+(\cos x + a\sin bx - 1)\right]^{\frac{1}{\cos x + a\sin bx - 1}} = e$ була.

Димәк, $\lim_{x\to 0} e^{\frac{\cos x}{x}+\frac{a\sin bx}{x}-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\left(\frac{(b\cdot a\sin bx)}{bx}-\frac{-1+\cos x}{x}\right)} = e^{\left(\lim\limits_{x\to 0} ab\cdot\frac{\sin bx}{bx} - \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}\right)} =$

$$= e^{\left(ab - \lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{x}{2}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)} = e^{ab-0} = e^{ab}.$$

24. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x$ чикләмәсен табарга.

Чишү. Чишү өчен, башта бөтен өлешне табабыз һәм аннан соң рәвешүзгәртүләр кертәбез:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^x =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}}\right]^{\frac{x(8x-3)}{x^2-3x+7}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^2-3x}{x^2-3x+7}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8-\frac{3}{x}}{1-\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}}} = e^8.$$

Димәк, $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x = e^8$.

25. ($x - \sin x$) ның x ка карата югарырак тәртиптәге чиксез кечкенә булуын күрсәтергә.

Чишү. $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(1-\frac{\sin x}{x}\right) = 1-1 = 0.$

Димәк, $x - \sin x = 0\ (x)$.

26. ($\sin^3 2x$) ның, x 0 гә омтылганда, нинди тәртиптә чиксез кечкенә булуын күрсәтергә.

Чишү. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^3 2x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2=8.$

Димәк, $\sin^3 2x$ ны x^3 белән чагыштырганда, ул өченче тәртиптәге чиксез кечкенә була.

27. ($\mathrm{tg}\,x-\sin x$) аңлатмасы x ка карата нинди тәртиптәге чиксез кечкенә була?

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\,x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cdot\sin^2\frac{x}{2}}{x^3}=\frac{1}{2}\neq 0.$$

Димәк, ($\mathrm{tg}\,x-\sin x$) аңлатмасы, x белән чагыштырганда, өченче тәртиптәге чиксез кечкенә зурлык була.

28. Мисаллар чишкәндә чиксез кечкенә ($x\to 0$) эквивалент функцияләрдән файдалану чишүне җиңеләйтә.

1) $\sin x\sim x$
2) $\mathrm{tg}\,x\sim x$
3) $\ln(1+x)\sim x$
4) $e^x-1\sim x$
5) $\arcsin x\sim x$
6) $\mathrm{arctg}\,x\sim x$
7) $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$
8) $\frac{a^x-1}{x}=\ln a$

29. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin 4x}-1}{\ln(1+\mathrm{tg}\,3x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin 4x}{\mathrm{tg}\,3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x}{3x}=\frac{4}{3}.$

30. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin^3(e^{2x}-1)}{\ln(1+\mathrm{arc\,tg}^3\,3x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(e^{2x}-1)^3}{\mathrm{arc\,tg}^3\,3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x)^3}{(3x)^3}=\frac{8}{27}.$

КҮНЕГҮЛӘР

Исбатлагыз:

119. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+3}{3x}=\frac{2}{3}.$

120. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}=2.$

121. $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\sqrt{x}=x^{\frac{3}{2}}.$

122. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-1}{x+1}=1.$

123. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}=1.$

124. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^2}{2x^2}=\frac{1}{2}.$

Кәкре сызыкларның асимптоталарын табыгыз:

125. $y=\frac{x^3+4}{x^2}$.

126. $y=\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$.

127. $y=x+2\operatorname{arctg} x$.

128. $y=x^2e^{-x}$.

129. $y=2x-\frac{\cos x}{x}$.

130. $y=\frac{\ln^2 x}{x}-3x$.

131. $y=\sqrt[3]{x^3-6x^2}$.

132. $y=\frac{1}{\sqrt{2x+3}}$.

133. $y=\frac{x}{x+1}$.

134. $y=\frac{1}{x^2-x-2}$.

135. $y=\frac{x^2+x-1}{x-1}$.

136. $y=\frac{x^2+x-1}{(x-1)^2}$.

Чикләмәләрне табыгыз:

137. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-7x+12}{x^2-9}$.

138. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^3+2x^2-x}{5x}$.

139. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$.

140. $\lim\limits_{n\to \infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}$.

141. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{2(x^2-1)}$.

142. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$.

143. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{(1+x)^3}-1}{x}$.

144. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}$.

145. $\lim\limits_{n\to \infty}\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$.

146. $\lim\limits_{n\to \infty}\frac{(n)!}{(n+1)!-n!}$.

147. $\lim\limits_{n\to \infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$.

148. $\lim\limits_{n\to \infty}\frac{1}{n^2}\left(1+2+3+\ldots+n\right)$.

149. $\lim\limits_{n\to \infty}\frac{2^n-1}{2^n+1}$.

150. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x-1}$ $(m\in N)$.

151. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[k]{x}-1}$ $(k,n\in N)$.

152. $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^x-a^a}{x-a}$ $(a>0)$.

153. $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^\alpha-a^\alpha}{x^\beta-a^\beta}$ $(a>0)$.

154. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin 3x}$.

155. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$.

156. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3\frac{x}{4}}{x^3}$.

157. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x}{\sin 5x}$.

158. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{5x}$.

159. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

160. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-x}$.

161. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{\operatorname{arctg}(x+2)}$.

162. $\lim\limits_{y\to a}\left(\sin\dfrac{y-a}{2}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\pi y}{2a}\right)$.

163. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(2x\operatorname{tg}x-\dfrac{\pi}{\cos x}\right)$.

164. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{\sin 4x}$.

165. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{x^2}$.

166. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{\arcsin(x+1)}$.

167. $\lim\limits_{\alpha\to\beta}\dfrac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\alpha^2-\beta^2}$.

168. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-\sqrt{1-\operatorname{tg}x}}$.

169. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+2x)-2\sin(a+x)+\sin a}{x^2}$.

170. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(a+2x)-2\operatorname{tg}(a+x)+\operatorname{tg}a}{x^2}$.

171. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$.

172. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{\pi}-\sqrt{\arccos x}}{\sqrt{x+1}}$.

173. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n$.

174. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$.

175. $\lim\limits_{x\to 0}(1+mx)^{\frac{n}{x}}$.

176. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)^{2x+1}$.

177. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{2\sec x}$.

178. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}$.

179. $\lim\limits_{x\to\pi}(1+3\operatorname{tg}x)^{\operatorname{ctg}x}$.

180. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{2x+1}\right)^{x^2}$.

181. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{\frac{x}{2x+1}}$.

182. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{2x+1}\right)^{x}$.

183. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\operatorname{cosec}x}$.

184. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+nx)}{x}$.

185. $\lim\limits_{x\to\infty}x(3^{\frac{1}{x}}-1)$.

186. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{7x}-e^{2x}}{\operatorname{tg}x}$.

187. $\lim\limits_{x\to\infty}\left\{x\left[\ln(x+a)-\ln x\right]\right\}$.

188. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+4}{x^2-4}\right)^{x^2}$.

189. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{1+x}-x\right)^{\frac{1}{x}}$.

190. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\sin x\right)^{\mathrm{tg}^2 x}$.

191. $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}$.

192. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{3x}$.

193. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

194. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$.

195. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 6x)^{\mathrm{ctg}^2 x}$.

196. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\ln(e+x)\right]^{\mathrm{ctg} x}$.

197. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}}$.

198. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^2}{10+x\sqrt{x}}$.

199. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$.

200. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[8]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$.

201. $\lim\limits_{x\to +\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

202. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(x+\sqrt[3]{1-x^3}\right)$.

203. $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi-x}$.

204. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\frac{1-2\cos x}{\pi-3x}$.

205. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$.

206. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2x}{x+1}}$.

207. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{\sin x}{x}}$.

208. $\lim\limits_{n\to \infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$.

209. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$.

210. $\lim\limits_{x\to +0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x-x\cos\sqrt{x}}$.

211. $\lim\limits_{n\to \infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^{n}$ $a>0,\ b>0$.

212. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(\pi x^{\alpha})}{\sin(\pi x^{\beta})}$.

Берьяклы чикләмәләрне табыгыз:

213. $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

214. $\lim\limits_{x\to -0}\frac{|\sin x|}{x}$.

215. $\lim\limits_{x\to 2-0}\frac{x-2}{|x-2|}$.

216. $\lim\limits_{x\to 2+0}\frac{x-2}{|x-2|}$.

217. $\lim\limits_{x\to 2-0}\frac{x}{x-2}$.

221. $\lim\limits_{x\to +0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

219. $\lim\limits_{x\to 3-0}\lg(x^2+3x)$.

220. $\lim\limits_{x\to -0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

221. $\lim\limits_{x\to +0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

V бүлек

ФУНКЦИЯНЕҢ НОКТАДА ӨЗЛЕКСЕЗЛЕГЕ

1. Билгеләмә (Коши буенча, «$\varepsilon - \delta$» телендә). Теләсә нинди $\varepsilon > 0$ саны өчен $|x-a| < \delta$ тигезсезлегеннән $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$ тигезсезлеге килеп чыгарлык $\delta > 0$ саны табылса, $f(x)$ функциясе $x = a$ ноктасында *өзлексез функция* дип атала:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\quad x \in X\ \left|x - a\right| < \delta,\ \Rightarrow \left|f(x) - f(a)\right| < \varepsilon.$$

2. Билгеләмә. $f(x)$ функциясе $x = a$ ноктасында билгеләнеп, аның $x = a$ ноктасында чикләмәсе булса һәм бу функциянең чикләмәсе аның шул ноктадагы кыйммәтенә тигез булса, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, $f(x)$ функциясе $x = a$ ноктасында *өзлексез функция* дип атала.

3. Билгеләмә. Әгәр теләсә нинди $\varepsilon > 0$ саны өчен $|\Delta x| < \delta$ тигезсезлегеннән $|\Delta f(x)| < \varepsilon$ тигезсезлеге килеп чыгарлык $\delta > 0$ саны табылса, $x = a$ ноктасында $f(x)$ функциясе *өзлексез функция* дип атала.

4. Билгеләмә («эзлеклелек телендә»). Аргументның a да җыелучан теләсә нинди кыйммәтләре эзлеклелеге өчен функциянең тиңдәшле кыйммәтләре эзлеклелеге аның $x = a$ ноктасындагы кыйммәтенә җыелса, $f(x)$ функциясе $x = a$ ноктасында *өзлексез функция* дип атала.

Югарыда әйтеп үтелгән дүрт билгеләмә дә үзара эквивалент була.

4.1. Катлаулы функцияләрнең өзлексезлеге

Теорема. $y = f(t)$ функциясе бирелсен, биредә $t = \varphi(x)$, $x \in X$. $y = f[\varphi(x)]$ функциясе бар дип исәплик. $t = \varphi(x)$ функциясе $x = a$ ноктасында, ә $y = f(t)$ функциясе $t = b$ ноктасында өзлексез булсын (биредә $b = \varphi(a)$). Ул вакытта катлаулы $y = f[\varphi(x)]$ функциясе $x = a$ ноктасында өзлексез була.

4.2. Өзелешле функцияләр, өзелү нокталарын классификацияләү

Әгәр $f(x)$ функциясе $x = a$ ноктасында өзлексез булса, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ тигезлеге дөрес була. Бу тигезлек үтәлмәсә, $f(x)$ функциясе a ноктасында өзекле була. Ул вакытта түбәндәге очраклар булырга мөмкин:

1. $\lim_{x \to a} f(x)$ бар, $f(x)$ функциясе $x = a$ өчен билгеләнмәгән яки, бу ноктада билгеләнсә дә, $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$. Бу очракта a ноктасы *читләтергә мөмкин булган өзеклек ноктасы* дип атала.

2. $x = a$ ноктасында берьяклы чикләнгән чикләмәләр булуы мөмкин, ләкин $f(x)$ ның чикләмәсе юк. Берьяклы чикләмәләр булса, алар үзара тигез булмас: $f(a-0) \neq f(a+0)$. Бу очракта a ноктасы *I төр өзеклек ноктасы* дип атала.

3. Әгәр a ноктасына сул яки уң яктан яки ике яктан да якынайганда функциянең кыйммәте чиксезлеккә омтылса, бу нокта *чиксез өзеклек ноктасы* дип атала.

4.3. Кисемтәдә өзлексез функцияләрнең үзлекләре

1. 1 нче теорема (Вейерштрасс теоремасы). Әгәр $y = f(x)$ функциясе $[a, b]$ кисемтәсендә өзлексез булса, ул бу кисемтәдә чикләнгән, ягъни барлык $x \in [a, b]$ өчен $|f(x)| \leq A$ булырлык $A > 0$ саны табыла.

2. 2 нче теорема (Вейерштрасс теоремасы). Әгәр $f(x)$ функциясе $[a, b]$ кисемтәсендә өзлексез булса, аның кыйммәтләре арасында түбән m һәм югары M кыйммәтләре була.

3. 1 нче Коши теоремасы. Әгәр $y = f(x)$ функциясе, $[a, b]$ кисемтәсендә өзлексез булып, аның очларында төрле тамгалы кыйммәтләр алса, ул вакытта бу кисемтә нокталарының кимендә бер c координаталы ноктасында бу функциянең кыйммәте нульгә тигез була, ягъни $f(c) = 0$ $(a < c < b)$.

4. 2 нче Коши теоремасы. Әгәр $y = f(x)$ функциясе, $[a, b]$ кисемтәсендә өзлексез булып, аның очларында үзара тигез булмаган кыйммәтләр алса, мәсәлән, $f(a) = A$, $f(b) = B$ $(A \neq B)$, A һәм B саннары арасындагы теләсә кайсы C саны

өчен a һәм b нокталары арасында $f(x) = C$ тигезлеген канәгатьләндерә торган c ноктасы табыла, ягъни $f(c) = C$ $(a < c < b)$.

4.4. Кире функция

Билгеләмә. Әгәр $y \in Y$ның һәр кыйммәтенә $x \in X$ның $f(x) = y$ булырлык билгеле бер кыйммәте тиңдәш булса, $x = \varphi(y)$ функциясе $y = f(x)$ функциясенә карата $(x \in X)$ *кире функция* дип атала.

Кайбер мисал һәм мәсьәләләрнең чишелешен карап үтик.

1. Элементар $y = x$ функциясенең өзлексезлеген күрсәтергә.

Чишү. Әйтик, x аргумент Δx үсемтәсен алсын. Ул вакытта y функциясе дә $\Delta y = (x + \Delta x) - x = \Delta x$ үсемтәсен ала. Әйтик, $\varepsilon > 0$ саны бирелгән булсын. Функция үсемтәсенең модуле $|\Delta y| = |\Delta x|$. Шуңа күрә, $|\Delta x| < \delta$ дип алып, $\delta = \varepsilon$ дип куйсак, теләсә нинди $\varepsilon > 0$ саны өчен $\delta = \varepsilon > 0$ булганлыгы күренә. Бу $|\Delta x| < \delta \to |\Delta y| = |\Delta x| < \delta = \varepsilon$ икәнлеген күрсәтә. Димәк, $y = x$ функциясе саннар күчәренең теләсә нинди x ноктасында өзлексез була.

2. $f(x) = \sin x$ функциясенең теләсә нинди $x = a$ ноктасында өзлексезлеген күрсәтергә.

Чишү. Өзлексезлекнең Коши билгеләмәсенә таянып, теләсә нинди $\varepsilon > 0$ өчен $|x - a| < \delta$ тигезсезлегеннән $|f(x) - f(a)| = |\sin x - \sin a| < \varepsilon$ тигезсезлеге килеп чыгарлык $\delta > 0$ санын табарга була. Дөрестән дә,

$$|\sin x - \sin a| = \left|2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}\right| \le 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right| < 2\left|\frac{x-a}{2}\right| = |x-a|.$$

Без биредә $\left|\cos\frac{x+a}{2}\right| \le 1$ булуыннан файдаландык. Шулай итеп, $\varepsilon > 0$ дип бирелгән булганлыктан, $\delta = \varepsilon$ дип алабыз. Ул вакытта барлык $x \in$ $|x - a| <$ ε өчен $|\sin x - \sin a| < \varepsilon$ тигезсезлеге үтәлә. Ул $\sin x$ның теләсә нинди $x = a$ ноктасында өзлексез булганлыгын күрсәтә.

3. $y = \sqrt{x}$ функциясенең өзлексезлеген исбатларга.

Исбатлау. Теләсә нинди $\varepsilon > 0$ өчен $\delta > 0$ табылганлыгын күрсәтик.

Дөрестән дә, $\left|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right| < \frac{x-x_0}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} < \frac{|x-x_0|}{\sqrt{x_0}} < \varepsilon$. Әгәр без $|x-x_0| < \varepsilon \cdot \sqrt{x_0}$ дип алсак, $\varepsilon\sqrt{x_0} = \delta(\varepsilon, x_0)$ килеп чыга. Ул вакытта $x = x_0$ ноктасында бирелгән функциянең өзлексез икәнлеге күренә.

4. Катлаулы $y = 3^{\cos x}$ функциясенең өзлексез булуын исбатларга.

Исбатлау. $t = \cos x$ дип тамгалап, алдарак әйтеп кителгән катлаулы функция өзлексезлеге турындагы теоремага нигезләнеп, $y = 3^t$ функциясе өзлексез дигән нәтиҗәгә киләбез.

5. $y = 2^{\frac{1}{x^2-9}}$ функциясенең өзеклек нокталарын (әгәр алар булса) табарга.

Чишү. $y = 2^t$ функциясе өзлексез, ә $t = \frac{1}{x^2-9}$ функциясе $x = \pm 3$ нокталарында өзелүгә дучар була. Шуңа күрә бирелгән катлаулы функция $x_1 = -3$, $x_2 = 3$ нокталарында гына өзеклек кичерә.

6. $y = 2^{\sin x}$ функциясенең өзлексез булуын күрсәтергә.

Чишү. Билгеле булганча, $y = 2^t$ функциясе өзлексез, $t = \sin x$ функциясе дә өзлексез. Димәк, катлаулы функциянең өзлексезлек теоремасы буенча бирелгән функция өзлексез була.

7. $y = \frac{1}{4\sin^2 x - 1}$ функциясенең өзеклек нокталарын (әгәр алар булса) табарга.

Чишү. $y = \frac{1}{4t^2-1}$, биредә $t = \sin x$ — өзлексез функция. Өзелү нокталары ваклаучының нульгә әйләнү нокталарында гына була, $4t^2 - 1 = 0$. Моннан $t^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow t = \pm\frac{1}{2}$. Димәк, $\sin x = \pm\frac{1}{2}$. Шулай итеп, катлаулы функциянең өзеклек нокталары булып $x = \pi n + \frac{\pi}{6}$ рәвешендәге нокталар тора.

8. $f(x) = \begin{cases} x, & x < 3, \\ x+1, & x \geq 3 \end{cases}$ функциясенең өзеклек ноктасының төрен табарга.

Чишү. $f(3-0)=\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f(x)=\lim\limits_{x\to 3} x=3,$

$$f(3+0)=\lim_{\substack{x\to 3\\ x>3}} f(x)=\lim_{x\to 3}(x+1)=4\,.$$

$x=3$ ноктасында берьяклы чикләмәләр бар. Алар чикле һәм төрле. Шуңа күрә $x=3$ ноктасы I төр (чикләнгән сикереш) өзеклек ноктасы була.

9. $y=10^{\frac{1}{x}}$ функциясенең өзеклек нокталарын табарга. Бу кәкренең нинди асимптоталары бар?

Чишү. Функциянең берьяклы чикләмәләрен табабыз:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 10^{\frac{1}{x}}=\infty,\ \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} 10^{\frac{1}{x}}=0\,.$$

Бирелгән кәкре бары тик $x=0$ ноктасында гына өзекле була. $x=0$ ноктасыннан уң якта бирелгән функциянең чиксез өзеклеге бар. Нульдән сулда кәкре $x=0$ вертикаль асимптотасына якын килә. Өстәвенә $\lim\limits_{x\to\pm\infty} 10^{\frac{1}{x}}=1$. Шулай булгач, $y=1$ турысы горизонталь асимптота була.

10. $y=\dfrac{1}{x^2-16}$ кәкресенең нинди асимптоталары булырга мөмкин?

Чишү. $x=\pm 4$ — вертикаль, ә $y=0$ горизонталь асимптоталары була. Бирелгән функция җөп функция икәнлеген исәпкә алып, кәкренең $x=4$ турысына ничек итеп якынлашуын ачыклыйк. Әгәр x $4-0$ гә омтылса, y $-\infty$ кә омтыла. Әгәр x $4+0$ гә омтылса, $y\to 0$. Димәк, бирелгән $x=\pm 4$ ноктасында II төр өзеклеге бар.

11. $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ функциясенең $[-1;\ 1]$ кисемтәсендә иң кечкенә һәм иң зур кыйммәтләрен табарга.

Чишү. Бирелгән функция өзлексез. Шуңа күрә бу кисемтәдә аның иң кечкенә һәм иң зур кыйммәтләре бар:

$$m=\frac{1}{1+1^2}=\frac{1}{2};\ M=\frac{1}{1+0^2}=1\,.$$

12. $-\infty < x < \infty$ аралыгында $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ функциясенең иң кечкенә һәм иң зур кыйммәтләрен табарга.

Чишү. Бирелгән функция, саннар күчәрендә өзлексез булса да, үзенең иң кечкенә $m = 0$ кыйммәтен бер ноктада кабул итми. Ә $x = 0$ булганда, үзенең иң зур кыйммәтен $M = 1$ не кабул итә.

13. $x^3 - 4x + 1 = 0$ тигезләмәсенең $[0;\ 1]$ кисемтәсендә тамыры булырмы?

Чишү. $f(x) = x^3 - 4x + 1 = 0$. Бу функциянең бирелгән кисемтә очларындагы кыйммәтләрен табыйк: $f(0) = 1 > 0$. $f(1) = -2 < 0$. Димәк, $f(\xi) = 0$ булырлык кимендә бер ξ ноктасы булырга тиеш. $[0; 1]$ кисемтәсен урталай бүләбез: $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{7}{8} = -0{,}875$. Димәк, без эзләгән тамыр $\left[0; \dfrac{1}{2}\right]$ кисемтәсендә ята. Бу кисемтәне тагын урталай бүләбез: $f\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{64} = 0{,}016$. Димәк, без эзләгән тамыр $\left[\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{2}\right]$ кисемтәсендә ята. Бу процессны чиксез дәвам итеп, тамырны теләсә нинди төгәллек белән табып була. Тамырларны табуның бу методы тигезләмәләр чишүнең интерваллар методына нигезләнә.

14. Бирелгән $y = x^2$ $(-\infty < x < \infty)$ функциясе өчен кире функция табып буламы?

Чишү. Бу очракта бирелгән функциягә карата кире булырлык функция юк. Чөнки x ның төрле ике кыйммәтенә y ның бер үк кыйммәте тиңдәш була.

15. $y = x^2 \wedge (0 \le x < \infty)$ функциясенә кире функция бармы?

Чишү. Бу очракта x ның төрле кыйммәтләренә y ның төрле кыйммәтләре тиңдәш була, шулай булгач, бирелгән функциягә карата кире булган $x = \sqrt{y}$ функциясе була.

16. Монотон булмаган $y = \begin{cases} x, & x \text{ рациональ булса,} \\ -x, & x \text{ иррациональ булса,} \end{cases}$

$(-\infty < x < \infty)$ функциясенең кире функциясе бармы?

Чишү. Әгәр дә $y = f(x)$ функциясенең $y \in (-\infty, +\infty)$ ноктасында бердәнбер чишелеше булса, бирелгән функциягә кире

функция була. Безгә бирелгән функция андый үзлекне канәгатьләндерә. Димәк, кире $x=\begin{cases} y, & y \text{ рациональ булса,} \\ -y, & y \text{ иррациональ булса,} \end{cases}$

функциясе бирелгән функциягә кире функция була.

17. Бирелгән $y=\sin x$ функциясенең кире функциясе бармы?

Чишү. Бар, чөнки бирелгән функция өзлексез һәм

$$-\frac{\pi}{2}+k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2}+k\pi \ (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$$

кисемтәсендә монотон була. Шуңа күрә бу кисемтәдә аның кире функциясе була, ягъни $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}+k\pi+0} \sin x=(-1)^{k+1}$ һәм $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}+k\pi-0} \sin x=(-1)^{k}$. Димәк, $[-1;\ 1]$ сегментында бу тигезләмәне чишеп, $x=\ (-1)^k \arcsin\ y+k\pi\ (k=0,\pm 1,\pm 2\ \ \ldots)$; $(-1 \leq y \leq 1)$ кире функциясен таба алабыз.

18. $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a^n$ күпбуыны функциясе теләсә нинди ноктада да өзлексез була, чөнки күпбуын өзлексез функцияләр суммасын тәшкил итә.

19. $y=\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+\ldots+b_n}$.

Рациональ вакланмалы функция санлы кучәрнең вакланмасы нульгә әйләнмәгән барлык нокталарда да өзлексез була.

КҮНЕГҮЛӘР

Түбәндәге функцияләрнең өзлексезлеген исбатлагыз:

222. $y=x^n$.

223. $y=cx^n$.

224. $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$.

225. $y=\cos x$.

226. $y=\operatorname{tg} x$.

227. $y=ax+b$.

228. $y=\sqrt[3]{x}$.

229. $y=|x|$.

230. $y=a^x$.

231. $y=\log_a x$.

Түбәндәге функцияләрнең өзелү нокталарын табыгыз:

232. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

233. $f(x)=\dfrac{10^{\frac{1}{x}}-1}{10^{\frac{1}{x}}+1}$.

234. $f(x)=\sin\dfrac{\pi}{x}$.

235. $f(x)=10^{\frac{1}{x^2}}$.

236. $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}$.

237. $y=\dfrac{1}{(1+x)^2}$.

238. $y=\cos^2\dfrac{1}{x}$.

239. $y=\dfrac{|x-2|}{x-2}$.

240. $y=\lg\,(x^2+3x)$.

241. $y=E(x)$.

242. $y=\dfrac{x}{x^2+x-6}$.

243. $y=\dfrac{1+x}{1+x^3}$.

244. $y=\dfrac{1-\sqrt{x}}{x^2-1}$.

245. $y=\dfrac{x}{\cos x}$.

246. $y=\dfrac{2}{1-2^x}$.

Бирелгән функцияләрнең кире функциясе бармы? Булса, аларны табыгыз:

247. $y=\dfrac{1}{x}$.

248. $y=10^{x+1}$.

249. $y=\dfrac{3^x}{1+3^x}$.

250. $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$.

251. $y=2\sin 3x$.

VI бүлек

ЧЫГАРЫЛМА ҺӘМ ДИФФЕРЕНЦИАЛ

Билгеләмә. $y=f(x)$ функциясенең x ноктасындагы үсемтәсен $\Delta y=[A(x)+\alpha(x, \Delta x)]\Delta x$ рәвешендә күрсәтеп булса, бу функция x ноктасында *дифференциалланучы функция* дип атала, биредә $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(x, \Delta x)=0$. $A(x)\cdot\Delta x$ кушылучысын $y=f(x)$ функциясенең тиңдәш x ноктасындагы *дифференциалы* дип атыйлар.

6.1. Функция үзгәрүенең уртача һәм моменталь тизлеге

$y=f(x)$ функциясенең $[x, x+\Delta x]$ кисемтәсендә үзгәрүенең уртача тизлеген табу өчен, бу кисемтәдә функция алган үсемтәне аргумент үсемтәсенә бүләргә кирәк:

$$v_{\text{урта}}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Вакытның t моментындагы *моменталь тизлеге* дип, вакытның $[t, t+\Delta t]$ аралыгында Δt 0 гә омтылганда, уртача тизлек чикләмәсен атыйлар:

$$v_{\text{мом.}}=\lim_{\Delta t\to 0}v_{\text{урта}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta t}.$$

6.2. Чыгарылманың геометрик мәгънәсе

$y=f(x)$ функциясенең абсциссасы x_0 булган ноктасында вертикаль булмаган орынмасы булсын өчен, $y=f(x)$ функциясенең x_0 ноктасында дифференциаллануы кирәк һәм шул җитә дә. Ягъни

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f(x_0)=k_{\text{ор}}.$$

Орынманың почмакча коэффициенты чыгарылманың орыну ноктасындагы кыйммәтенә тигез була.

Функциянең дифференциалы орынманың ординатасы үсемтәсенә тигез була.

6.3. Катлаулы функциянең чыгарылмасы

Әгәр f функциясенең x_0 ноктасында, ә u функциясенең $y_0=f(x_0)$ ноктасында чыгарылмасы булса, ул вакытта $F(x)=u[f(x)]$ катлаулы функциясенең x ноктасында шулай ук чыгарылмасы була һәм $F'(x_0)=u'[f(x)]\cdot f'(x_0)$ формуласы буенча табыла.

6.4. Югары тәртип чыгарылмалар һәм дифференциаллар

Әгәр $y=f(x)$ функциясе ниндидер X күплегендә дифференциалланса, бу күплекнең һәр x ноктасына тиңдәш итеп $f'(x)$ куела. Яңа $f'(x)$ функциясенең x ноктасындагы чыгарылмасы ул функциянең бу ноктадагы *икенче тәртиптәге* яки *икенче чыгарылмасы* дип атала һәм $f''(x)=[f'(x)]'$ дип тамгалана. Шуңа охшаш итеп, $(n-1)$ тәртиптәге чыгарылманың чыгарылмасы X күплегендәге *n нчы чыгарылма* дип атала һәм аны $[f^{(n-1)}(x)]'=f^{(n)}(x)$ дип тамгалыйлар. Әгәр $y=f(x)$ функциясе ниндидер X күплегендә дифференциалланса, бирелгән функциянең дифференциалы (ул функция үсемтәсенең төп сызыкча кисәген тәшкил итә) $dy=f'(x)dx$ була.

Дифференциал шул ук бәйсез x үзгәрешлесенең функциясе була. f функциясе дифференциалының x ноктасындагы дифференциалы ул функциянең бу ноктада *икенче тәртип дифференциалы* дип атала һәм бу функциянең дифференциалы $d(dy)=d[f'(x)dx]=d^2y=f''(x)\,dx\,dx=f''(x)\,dx^2$ дип тамгалана.

$f(x)$ функциясенең X күплегендәге n нчы тәртип дифференциалы $(n-1)$ *нче тәртип дифференциалының дифференциалы* дип атала һәм аны $d^ny=d(d^{n-1}y)=f^{(n)}dx^n$ дип тамгалыйлар.

Әгәр $y=f(x)$ функциясе $[a,b]$ кисемтәсендә дифференциалланса һәм бу кисемтәдә $f'(x_0)$ нең тамгасы сакланса, $x=\varphi(y)$ кире функциясе $[f(a), f(b)]$ кисемтәсендә дифференциаллана һәм $x'_y=\dfrac{1}{y'_x}$ була.

Катлаулы $y=f(x)$ функциясенең чыгарылмасын тапканда, логарифмик дифференциаллауны куллану уңайлы. Аның өчен:

а) бирелгән тигезләмәнең ике ягын да e нигезе буенча логарифмларга яки $\ln y=\ln f(x)=\varphi(x)$ дип алырга;

б) килеп чыккан тигезлекнең ике ягын да дифференциалларга, биредә $\ln y$ аңлатмасы x ка бәйле катлаулы функция була: $\frac{y'}{y} = \varphi'(x)$;

в) y ны x аңлатмасы аша күрсәтеп, y' ны табарга:

$$y' = y \cdot \varphi'(x) = f(x) \cdot \varphi'(x).$$

Чыгарылмаларның һәм дифференциалларның берләштерелгән таблицасы

№ т/н	Функция	Чыгарылма	Дифференциал
1.	C	0	0
2.	uv	$uv' + u'v$	$u\,dv + v\,du$
3.	Cu	Cu'	Cdu
4.	$u + v$	$u' + v'$	$du + dv$
5.	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	$\frac{vdu - udv}{v^2}$
6.	$\frac{C}{v}$	$-\frac{Cv'}{v^2}$	$-\frac{C\,dv}{v^2}$
7.	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha x^{\alpha-1} dx$
8.	a^x	$a^x \ln a$	$a^x \ln a\, dx$
9.	e^x	e^x	$e^x\, dx$
10.	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\frac{dx}{x}$
11.	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$\frac{dx}{x \ln a}$
12.	u^v	$v\, u^{v-1} u' + u^v v' \ln u'$	$vu^{v-1} du + u^v \ln u\, dv$
13.	$\sin x$	$\cos x$	$\cos x\, dx$
14.	$\cos x$	$-\sin x$	$-\sin x\, dx$
15.	$\mathrm{tg}\, x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{dx}{\cos^2 x}$
16.	$\mathrm{ctg}\, x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\frac{dx}{\sin^2 x}$
17.	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

№ т/н	Функция	Чыгарылма	Дифференциал
18.	arccos x	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
19.	arctg x	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{dx}{1+x^2}$
20.	arcctg x	$-\frac{1}{1+x^2}$	$-\frac{dx}{1+x^2}$
21.	sh x	ch x	ch $x\,dx$
22.	ch x	sh x	sh $x\,dx$
23.	th x	$\frac{1}{\text{ch}^2 x}$	$\frac{1}{\text{ch}^2 x}dx$
24.	cth x	$-\frac{1}{\text{sh}^2 x}$	$-\frac{1}{\text{sh}^2 x}dx$

Кайбер мәсьәлә һәм мисалларның чишелешен карап китик.

1. $y = x^3$ функциясе, теләсә нинди x кыйммәте алганда да, дифференциалланучы була, чөнки:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + (3x\Delta x + \Delta x^2)\Delta x.$$

Чишү. Биредә $A(x) = 3x^2$ һәм $\alpha(x, \Delta x) = 3x\Delta x + \Delta x^2$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(x, \Delta x) = 0$ икәнлеге ачык. Димәк, $d(x^3) = 3x^2\Delta x$.

2. $y = e^x$ функциясе xның теләсә нинди кыйммәте өчен дифференциаллануын исбат итәргә.

Исбатлау. $y = e^{x+\Delta x} - e^x = e^x(e^{\Delta x} - 1)$. Ләкин $e^{\Delta x} - 1 \sim \Delta x$, шуңа күрә $e^{\Delta x} - 1 = \Delta x + \beta(\Delta x)$, биредә $\beta(\Delta x)$ кушылучысы (аңлатмасы) Δx ка карата югарырак тәртиптәге чиксез кечкенә зурлык булып тора. Икенче төрле әйткәндә, $e^{\Delta x} - 1 = \Delta x + \alpha_1(\Delta x) \cdot \Delta x$. Биредә $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha_1(\Delta x) = 0$. Ул вакытта $\alpha = e^x\alpha_1$ булганда, $\Delta y = e^x\Delta x + \alpha\Delta x$, биредә $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$. Димәк, $y = e^x$ функциясе, x теләсә нинди кыйммәт алганда да, дифференциалланучы була. Шуңа күрә $d(e^x) = e^x\Delta x$.

3. $y=|x|$ функциясенең $x=0$ ноктасында дифференциалланмавын күрсәтергә.

Чишү.

$$y=\begin{cases} x, & x\geq 0 \text{ булса,}\\ -x, & x<0 \text{ булса,}\end{cases}$$

$x=0$ ноктасында $y=0$ була. Шуңа күрә

$$\Delta y=\begin{cases} \Delta x, & \Delta x\geq 0 \text{ булса,}\\ -\Delta x, & \Delta x<0 \text{ булса.}\end{cases}$$

Аның теләсә нинди кыйммәте өчен

$$\Delta y-A\Delta x=\begin{cases} (1-A)\Delta x, & \Delta x\geq 0 \text{ булса,}\\ (-1-A)\Delta x, & \Delta x<0 \text{ булса}\end{cases},$$

аермасы Δx белән чагыштырганда югарырак тәртиптәге чиксез кечкенә зурлык булмый, чөнки $1-A$, $-1-A$ коэффициентларының кимендә берсе нульгә тигез түгел. $x=0$ ноктасында $y=|x|$ функциясе графигының сыну ноктасы була. Бу ноктада графикка орынма үткәреп булмый.

4. Ирекле төшкәндә, моменталь тизлекне табарга.

Чишү. Ирекле төшү законы буенча, t вакыт эчендә үткән юл $s=\frac{gt^2}{2}$ формуласы аша бирелә. Ирекле төшүнең $[t+\Delta t]$ вакыты эчендә үткән юлы $s+\Delta s=\frac{g(t+\Delta t)^2}{2}$ формуласы буенча исәпләнә. Ул вакытта $\Delta s=\frac{g(t+\Delta t)^2}{2}-\frac{gt^2}{2}=gt\Delta t+\frac{g\Delta t^2}{2}$ була. Димәк, $\upsilon_{\text{урп.}}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=gt+\frac{g\Delta t}{2}$. Δt 0 гә омтылганда чикләмәгә күчсәк, вакытның t моментында моменталь тизлекне табабыз:

$$\upsilon_{\text{мом.}}=\lim_{\Delta t\to 0}\upsilon_{\text{урп.}}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(gt+\frac{g\Delta t}{2}\right)=gt.$$

5. $y=x^3$ кәкресенең абсциссасы $x_0=2$ булган ноктадагы орынмасының почмакча коэффициентын табарга; орынманың һәм нормальнең тигезләмәләрен язарга.

Чишү. Билгеле булганча, $(x^3)'=3x^2$. Димәк, $x_0=2$ булганда, орынма коэффициенты $k_{\text{ор.}}=\operatorname{tg}\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ формуласын

кулланабыз: $k_{ор.} = 3 \cdot 2^2 = 12$. Кәкренең орынма тигезләмәсен $y - y_0 = f\,'(x_0)(x - x_0)$ формуласына куйсак, $y - 8 = 12(x - 2)$ яки $y - 12x + 16 = 0$ була. Кәкренең нормаль тигезләмәсен $y - y_0 = -\frac{1}{k}(x - x_0)$ формуласына куйсак, $y - 8 = -\frac{1}{12}(x - 2)$ яки $y = \frac{98 - x}{12}$ була.

6. $y = e^x$ кәкресенә $x_0 = 0$ ноктасында орынма һәм нормаль тигезләмәләрен язарга.

Чишү. $f(x_0) = e^0 = 1$. Чыгарылмасы $(e^x)' = e^x$, $x = 0$ булганда, $f(0) = e^0 = 1$. Димәк, орынма тигезләмәсе $y - 1 = 1(x - 0)$ яки $y = x + 1$. Нормаль тигезләмәсе $y - 1 = -1(x - 0)$ яки $y = -x + 1$ була.

7. $y = x^2 - 4x + 3$ параболасының абсциссасы $x_0 = 3$ булган ноктасындагы орынма тигезләмәсен язарга.

Чишү. $f\,'(x) = (x^2 - 4x + 3)' = 2x - 4$. Шуңа күрә $f\,'(3) = 6 - 4 = 2$, $y_0 = 9 - 12 + 3 = 0$. Орынма тигезләмәсе $y - 0 = 2(x - 3)$ яки $y = 2(x - 3)$ була.

8. $y = \text{tg}\,x$ кәкресенә $x_0 = \frac{\pi}{4}$ ноктасында орынма үткәрергә.

Чишү. $f(x_0) = \text{tg}\frac{\pi}{4} = 1$, $f'(x_0) = \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 2$. Орынма тигезләмәсе $y - 1 = 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ яки $y = 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$.

Чыгарылмаларны исәпләүгә мисаллар

9. $\left(\frac{1}{x^3}\right)' = \left(x^{-3}\right)' = -3x^{-3-1} = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$.

10. $\left(\sqrt[6]{x^5}\right)' = \left(x^{\frac{5}{6}}\right)' = \frac{5}{6}x^{\frac{5}{6}-1} = \frac{5}{6\sqrt[6]{x}}$.

11. $(x^5 + 3x^4 - 5x^2 + 1)' = 5x^4 + 12x^3 - 10x$.

12. $\left(\frac{x^2+3}{x^4+1}\right)' = \frac{\left(x^4+1\right)\cdot 2x - \left(x^2+3\right)\cdot 4x^3}{\left(x^4+1\right)^2} = \frac{2x\left(1-6x^2-x^4\right)}{\left(x^4+1\right)^2}$.

13. $\left(\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}\right)' = \left(\frac{x^{\frac{1}{3}}-1}{x^{\frac{2}{3}}-1}\right)' = \frac{\left(x^{\frac{2}{3}}-1\right)\cdot\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}-\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}}{\left(x^{\frac{2}{3}}-1\right)^2} =$

$= \frac{2\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^2}-1}{3\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[3]{x^2}-1\right)^2}.$

14. $(5\sin x + 3\cos x)' = 5\cos x - 3\sin x.$

15. $(3\mathrm{tg}x - x)' = \frac{3}{\cos^2 x} - 1 = \frac{3-\cos^2 x}{\cos^2 x}.$

16. $\left(\frac{\cos x}{1-\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)'\cdot(1-\sin x)-\cos x(1-\sin x)'}{(1-\sin x)^2} = \frac{1}{1-\sin x}.$

17. $\left[e^x(\cos x - \sin x)\right]' = \left(e^x\right)'\cdot(\cos x - \sin x) + e^x(\cos x - \sin x)' =$
$= -2e^x \cdot \sin x.$

18. $(x\ln x)' = x(\ln x)' + (x)'\ln x = x\cdot\frac{1}{x} + 1\cdot\ln x = 1 + \ln x.$

19. $y = 3 + \frac{5}{x}$ функциясе $xy' + y = 3$ аңлатмасын канәгатьләндергәнен күрсәтергә.

Чишү. $y' = \left(3+\frac{5}{x}\right)' = -\frac{5}{x^2}$; y һәм y' кыйммәтләрен бирелгән аңлатмага куйгач, $x\cdot\left(-\frac{5}{x^2}\right) + \left(3+\frac{5}{x}\right) = 3$ булганлыгы килеп чыга.

Катлаулы функцияләрнең чыгарылмаларын табыгыз:

20. $y = e^u$, $u = x^4$ булса.

Чишү. $y'_x = y'_u \cdot u'_x = e^u \cdot 4x^3 = e^{x^4} \cdot 4x^3 = 4x^3 e^{x^4}$. Димәк, $(e^{x^4}) = 4x^3 e^{x^4}$.

21. $y = \sin u$, $u = x^2 + 3$ булса.

Чишү. $y_x' = \cos u \cdot 2x = \cos(x^2+3)2x$. Димәк, $[\sin(x^2+3)] = 2x\cos(x^2+3)$.

22. $y = \mathrm{tg}\ u$, $u = e^x$ булса.

Чишү. $y'_x = \frac{1}{\cos^2 u}\cdot e^x = \frac{e^x}{\cos^2 e^x}$. Димәк, $\left(\mathrm{tg}\ e^x\right)' = \frac{e^x}{\cos^2 e^x}$.

23. $y = \ln u$, $u = \sin x$ булса.

Чишү. $y'_x = \frac{1}{u}\cdot\cos x = \frac{1}{\sin x}\cdot\cos x = \mathrm{ctg}\, x$. Димәк, $(\ln\sin x)' = \mathrm{ctg}x.$

24. $y = e^{\sin x}$, $u = \sin x$ булса.

Чишү. $y = e^u$, $u = \sin x$ рәвешендә язгач, $y' = (e^{\sin x})' = = (e^u)_u' (\sin x)_x' = e^u \cos x = e^{\sin x} \cos x$. Димәк, $y' = e^{\sin x} \cos x$.

25. $y = \sin e^x$.

Чишү. $y_x' = (\sin e^x)' = \cos e^x \cdot (e^x)' = e^x \cos e^x$.

26. $y = \sin 5x$.

Чишү. $y_x' = \cos 5x\,(5x)' = 5\cos 5x$.

27. $y = e^{7x}$.

Чишү. $y' = e^{7x} \cdot (7x)' = 7e^{7x}$.

28. $y = \ln x^3$.

Чишү. $y' = \dfrac{(x^3)'}{x^3} = \dfrac{3x^2}{x^3} = \dfrac{3}{x}$.

29. $y = \arcsin\sqrt{x}$.

Чишү. $y' = \dfrac{\left(\sqrt{x}\right)'}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$.

30. $y = x^2 \arcsin x$.

Чишү. $y' = (x^2 \arcsin x)' = (x^2)' \arcsin x + x^2 (\arcsin x)' =$

$= 2x \arcsin x + \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$.

31. $y = x^3 \arccos x$.

Чишү. $y' = (x^3 \arccos x)' = (x^3) \arccos x + x^3(\arccos x)' =$

$= 3x^2 \arccos x - \dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$.

32. $y = \operatorname{arctg} x^2$.

Чишү. $y' = \left(\operatorname{arctg} x^2\right)' = \dfrac{\left(x^2\right)'}{1+x^4} = \dfrac{2x}{1+x^4}$.

33. $y = \operatorname{arcctg}\dfrac{x^2}{1+x}$.

Чишү. $y' = \left(\operatorname{arcctg}\dfrac{x^2}{1+x}\right)' = -\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x^2}{1+x}\right)^2}\left(\dfrac{x^2}{1+x}\right)' = -\dfrac{x(x+2)}{x^4+x^2+2x+1}$.

Катлаулы функцияне дифференциаллаганда, күп очракларда логарифмлап дифференциаллауны куллану уңайлы.

34. $y = \ln \dfrac{(x+1)^3(x^2+5)^4}{\sqrt[5]{x+2}\cdot e^{\sin x}}$. $\quad y' = ?$

Чишү. Логарифм үзлегеннән файдаланып аңлатманы гадиләштерә алабыз:

$$y = 3\ln(x+1) + 4\ \ln(x^2+5) - \frac{1}{5}\ \ln(x+2) - \sin x.$$

Моннан табабыз:

$$y' = 3\frac{1}{x+1} + 4\frac{1}{x^2+5}\cdot 2x - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x+2} - \cos x = \frac{3}{x+1} + \frac{8x}{x^2+5} - \frac{1}{5(x+2)} - \cos x.$$

35. $y = \dfrac{5e^{tgx}\cdot\sqrt[3]{x^2+2}}{7\cos x\cdot(x^3+2x-1)^2}$. $\quad y' = ?$

Чишү. Иң элек *e* нигезе буенча логарифмлыйбыз:

$$\ln y = \ln 5 + \mathrm{tg}x + \frac{1}{3}\ \ln(x^2+2) - \ln 7 - \ln\cos x\ - 2\ln(x^3+\ 2x-1).$$

Тигезлекнең ике ягыннан да чыгарылма алабыз:

$$\frac{y'_x}{y} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2x}{x^2+2} - \frac{1}{\cos x}(-\sin x) - 2\cdot\frac{(3x^2+2)}{x^3+2x-1} = \frac{1}{\cos^2 x} +$$

$$+\frac{2x}{3(x^2+2)} + \mathrm{tg}\,x - \frac{2(3x^2+2)}{x^3+2x-1}.$$

Шулай итеп,

$$y'_x = \frac{5e^{\mathrm{tg}x}\sqrt[3]{x^2+2}}{7\cos x(x^3+2x-1)^2}\cdot\left[\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{2x}{3(x^2+2)} + \mathrm{tg}\,x - \frac{2(3x^2+2)}{x^3+2x-1}\right].$$

36. $y = (\sin x)^{\cos x}$. $\quad y' = ?$

Чишү. Бу функцияне, гадәттә, *күрсәткечле-дәрәҗәле функция* дип атыйлар. Андый функциянең чыгарылмасын табу өчен, башта *e* нигезе буенча логарифмлыйлар, аннан соң логарифм чыгарылмасын кулланалар:

$$\ln y = \cos x\ \ln \sin x.$$

Тигезлекнең ике ягыннан да чыгарылма алабыз:

$$\frac{y'}{y} = \cos x\cdot\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x + (-\sin x)\ln\sin x = \frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x\ln\sin x.$$

Шулай итеп,

$$y' = y\left[\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \cdot \ln\sin x\right] = (\sin x)^{\cos x}\left[\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \cdot \ln\sin x\right] =$$

$$= \cos x\,(\sin x)^{\cos x - 1} \cdot \cos x + (\sin x)^{\cos x} \ln \sin x\,(-\sin x).$$

Гомумән, әгәр безгә $y = u(x)^{v(x)}$ функциясе бирелгән булса, $\ln y = v \ln u$ дип яза алабыз. Шуннан логарифмик чыгарылма формуласы файдалансак,

$$y' = y\left[v'_x \ln u + \frac{v \cdot u'}{u}\right] = u^v\left[v'_x \ln u + \frac{v u'_x}{u}\right] = u^v \ln u \cdot v'_x + v \cdot u^{v-1} \cdot u'_x$$

килеп чыга. Югарыда күренгәнчә, $(a^v)' = a^v \cdot \ln a \cdot v_x{}'$. Шуңа күрә $(a^x)' = a^x \ln a$.

37. $y = e^{kx}$. $\quad y^{(n)} = ?$

Чишү. $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$, $y''' = k^3 e^{kx}$, ..., $y^{(n)} = k^n e^{kx}$.

38. $y = x^3 + 2x + 5$. $\quad y^{(5)} = ?$

Чишү. $y' = 3x^2 + 2$, $y'' = 6x$, $y''' = 6$, $y^{(IV)} = 0$, $y^{(V)} = 0$.

39. $y = \sin x$. $\quad y^{(n)} = ?$

Чишү. $y' = \cos x$, $y'' = -\sin x$, $y''' = -\cos x$, $y^{(IV)} = \sin x$, $y^{(V)} = \cos x$.

Китерү формуласы кулланып, $\cos x$ ны $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ аша күрсәтик:

$$y' = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right);\quad y'' = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right);\quad y''' = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right);$$

$$y^{(IV)} = \sin\left(x + 4\frac{\pi}{2}\right)...$$

Моннан $y^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ булганлыгы ачык күренә.

40. $y = \cos x$. $\quad y^{(n)} = ?$

Чишү. Нәкъ алдагыча фикер йөртеп табабыз:

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

41. $y = \sin x$ булса, $y^{(115)}$ сын исәпләргә.

Чишү.

$$y^{(115)} = \sin\left(x + 115 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = -\cos x.$$

Ачык булмаган функция $F(x, y) = 0$ тигезләмәсе белән бирелгән очракта, аның чыгарылмасын $\frac{d}{dx}F(x, y) = 0$ тигезләмәсеннән табарга була.

42. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.\ \frac{dy}{dx}=?$

Чишү. Бирелгән тигезлекнең ике кисәген дә x буенча дифференциаллыйбыз: $\frac{2x}{a^2}-\frac{2yy_x'}{b^2}=0$. Шулай итеп, $y_x'=\frac{b^2x}{a^2y}$.

43. $x^2+y^2-8x-10y+5=0.\ \frac{dx}{dy}=?$

Чишү. $2x+2yy'-8-10y'=0$. Моннан $y'=\frac{x-4}{5-y}$.

44. $x^y=y^x.\ \frac{dx}{dy}=?$

Чишү. Бирелгән тигезлекнең ике ягын да e нигезе буенча логарифмлыйбыз: $y\ln x=x\ln y$. Килеп чыккан тигезләмәнең ике ягын да y буенча дифференциаллыйбыз:

$$y'\ln x+y(\ln x)'=x'\ln y+x(\ln y)';$$

$$1\cdot\ln x+y\cdot\frac{x'}{x}=x'\ln y+x\cdot\frac{1}{y}.$$

Шулай итеп, $x'\left(\frac{y}{x}-\ln y\right)=\frac{x}{y}-\ln x$. Димәк, $x'=\frac{dx}{dy}=\frac{x(x-y\ln x)}{y(y-x\ln y)}$.

45. $y=\sin x$ кәкресенә $x_0=\frac{\pi}{6}$ ноктасында орынма үткәрергә.

Чишү. Орыну ноктасында ордината кыйммәтен табабыз. $y\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{2}$. Орынуның почмак коэффициенты $y'=\cos x$; $y'(x_0)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Табылган кыйммәтләрне кәкренең $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ орынма тигезләмәсенә куйсак, $y-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ яки $y=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$.

46. $y=x\ln x$ кәкресенә $x_0=e$ ноктасында орынма һәм нормаль үткәрергә.

Чишү. Элек y_0 ны табабыз. $y_0=e\ln e=e$. Чыгарылмасы $y'=(x\cdot\ln x)'=1+\ln x$. $x_0=e$ шартын исәпкә алсак, $y_0'=1+\ln e=2$. Шуннан орыну тигезләмәсе $y-e=2(x-e)$. Ә нормаль тигезләмәсе $y-e=-\frac{1}{2}(x-e)$.

47. $y = \begin{cases} 0 \text{ — әгәр } x \text{ рациональ булса,} \\ x \text{ — әгәр } x \text{ иррациональ булса ,} \end{cases}$

y функциясе дифференциалланамы?

Әйе, дифференциаллана фәкать бер $x = 0$ ноктасында гына.

КҮНЕГҮЛӘР

Билгеләмәгә таянып, түбәндәге функцияләрнең чыгарылмаларын табыгыз:

252. $y = 3x^2 - 4x$.

253. $y = \frac{1}{x}$.

254. $y = \sqrt{x}$.

255. $y = \sin 3x$.

256. $y = e^{3x}$, $y\,'(0) = ?$

257. $y = \cos(ax+b)$.

258. $y = x^2 + 3x - 1$, $y'(1) = ?$

259. $y = \sqrt[3]{x^2}$.

260. $y = \frac{1}{e^x+1}$.

261. $y = 2^{x^2}$.

Түбәндәге функцияләрнең чыгарылмаларын табыгыз:

262. $y = 2x^3 - 5x^2 + 7x + 4$.

263. $y = x^4 - 3x^2 - 2x + 1$; $y\,'(1) = ?$

264. $y = x^3 - 2x^2 + 2$; $y\,'(a) = ?$

265. $y = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2}$.

266. $y = 2\sqrt{x} - \frac{1}{x} + \sqrt[5]{4}$.

267. $y=\frac{t}{n}+\frac{n}{t}+\frac{t^2}{m^2}+\frac{m^2}{t^2}$.

268. $y=\frac{mx^2+nx+4a}{a+b}$.

269. $y=\frac{ax^3+bx^2+c}{(a+b)x}$.

270. $y=3t-2\sqrt{t}$. $f'(4)=?$

271. $y=\frac{x^2-5x-1}{x^3}$. $f'(-1)=?$

272. $f(t)=(a+b)\cdot t^5+(a+b)^2$.

273. $f(t)=mt^n+nt^m$.

274. $\varphi(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+0{,}1x^{10}$.

275. $f(t)=t^2(t^2-1)$.

276. $f(t)=(2t^2+1)(4t^3-5)$.

277. $f(t)=(1-4t^2)(2t^3+1)$.

278. $\varphi(t)=(x^2+1)(3x-2)(1-x^3)$.

279. $f(t)=\left(\sqrt{t}+1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{t}}-1\right)$.

280. $y=\frac{t+1}{t-1}$.

281. $y=\frac{x}{x^2+1}$.

282. $z=\frac{ax+b}{cx+d}$.

283. $z=\frac{1-x^3}{1+x^3}$.

284. $\varphi(x)=\frac{x^5}{x^3-2}$.

285. $f(x)=\frac{1}{x^2+x+1}$.

286. $y=\frac{1}{x^2-3x+6}$.

287. $\upsilon=\frac{t^2+t-1}{t^3+1}$.

288. $\upsilon=\frac{3}{(1-u^2)(1-2u^3)}$.

289. $y=\frac{1}{x+2}+\frac{3}{x^2+1}$. $y'(0)=?$

290. $\varphi(t)=\frac{3}{5-t}+\frac{t^2}{5}$. $\varphi'(2)=?$

291. $\varphi(t)=\left(\sqrt{t^3}+1\right)t$. $\varphi'(0)=?$

292. $y=(x^2+1)^5$.

293. $y=(1-t^2)^{10}$.

294. $y=\left(\frac{t+1}{t-1}\right)^2$.

295. $y=\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)^5$.

296. $y=(x^2+1)^n$.

297. $t=(1+3x)^5$.

298. $t=\left(a+b\sqrt{x}\right)^4$.

299. $t=\frac{1}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}}$.

300. $t=\sqrt[3]{2x^2+x-1}$.

301. $y=\frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$.

302. $y=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

303. $y=x\sin x-x^2\cos x$.

304. $y=x\,\mathrm{tg}x+\mathrm{ctg}x$.

305. $y=\sin 3x$.

306. $y=x\sin(x^2+1)$.

307. $y=\sin^2 x$.

308. $y=\frac{x}{\sin x+\cos x}$.

309. $y=\frac{x\sin x}{1+\mathrm{tg}x}$.

310. $y=3\sin^2 t-\sin^3 t$.

311. $y=b\cos\frac{t}{3}$

312. $y = 3\sin(3t + 5)$.

313. $y = \sin\frac{1}{t}$.

314. $y = \cos^3 4t$.

315. $y = \sin^2(\cos 3t)$.

316. $y = \frac{\sin^2 t}{\cos t}$.

317. $y = \frac{1 + \sin^2 t}{\cos t^2}$.

318. $y = \frac{1 + \sin 2x}{1 - \sin 2x}$.

319. $y = \mathrm{tg}x + \frac{2}{3}\mathrm{tg}^3 x + \frac{1}{5}\mathrm{tg}^5 x$.

320. $y = \mathrm{tg}^3 \frac{x^2 + 2x - 1}{3}$.

321. $y = \sin\left(\cos\frac{1}{t}\right)$.

322. $y = \sin t \cdot \cos(\sin t)$.

323. $y = \arcsin\frac{x}{2}$.

324. $y = \left(\arcsin\frac{x}{a}\right)^2$.

325. $y = \left(\arccos\frac{1}{x+1}\right)^3$.

326. $y = x^3 \mathrm{arctg}\, x$.

327. $y = \frac{\arcsin x}{x}$.

328. $y = t\sin t \cdot \mathrm{arctg}\, t$.

329. $y = \frac{\arcsin t}{\sqrt{1 - t^2}}$.

330. $y = \mathrm{arctg}\frac{2t}{1 - t^2}$.

331. $y = x\sqrt{1 - x^2} + \mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$,

$y'(0) = ?$

332. $y = \mathrm{arctg}\frac{a + x}{1 - ax}$.

$y'(0) = ?\ \ y'(-1) = ?$

333. $y = \ln\frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}$.

334. $y = \ln\sqrt{\frac{e^{3x}}{1 + e^{3x}}}$. $y'(0) = ?$

335. $y = t(1 - \ln t)$.

336. $y = \cos^2 t - 2\ln\cos t$.

337. $y = t^2 \log_3 t$.

338. $y = \sqrt{\ln t}$.

339. $y = \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)$.

340. $y = \ln\left(\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x}\right)$.

341. $y = \ln\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

342. $y = \ln^2(1 + \cos t)$.

343. $y = t\sin(t\ln t)$.

344. $y = \sin\sqrt{t}\,\ln\frac{1}{\sqrt{t}}$.

345. $y = \ln\arccos 2t$.

346. $y = \mathrm{arctg}[\ln(at + b)]$.

347. $y = \ln\mathrm{arctg}\sqrt{1 + t^2}$.

348. $y = \arcsin^2\left[\ln(a^3 + x^3)\right]$.

349. $y = e^{-t^2}$.

350. $y = a^{\sin t}$.

351. $y = e^{-x^2} \cdot \cos e^{-2x}$.

352. $y = \sin t^2 e^{\cos t}$.

353. $y = e^{at} \cdot \sin bt$.

354. $y = \frac{t^3 + 2^t}{e^t}$.

355. $y = \frac{\cos t}{e^t}$.

356. $y=\dfrac{1+e^t}{1-e^t}$.

357. $y=e^{\sqrt{t+1}}$.

358. $y=2^{3^t}$.

359. $y=e^{\sqrt{\ln t}}$.

360. $y=x^2\cdot e^{-\frac{x^2}{a^2}}$.

361. $y=a^t\cdot t^a$.

362. $y=x^x$.

363. $y=\sqrt[x]{x}$.

364. $y=(\cos x)^{\sin 2x}$.

365. $y=x^{x^3}$.

366. $y=x^{\sqrt{x}}$.

367. $y=(\ln t)^t$.

368. $y=\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$.

369. $y=\sqrt[x]{(x+1)^2}$.

370. $y=\sqrt{x\sin x\cdot\sqrt{1-e^x}}$.

371. $y=x^{\sin x}$.

372. $y=x^3\cdot e^{x^2}\cdot\sin 2x$.

373. $y=\log_x a$.

374. $y=(x-1)\sqrt[3]{(x+1)^2\cdot(x-2)}$.

375. $y=\dfrac{x(x^2+1)}{\sqrt{1-x^2}}$.

376. $y=\sqrt[3]{\dfrac{x(1+x^2)}{(1-x^2)^2}}$.

377. $y=x^{e^x}$.

378. $y=x^{x^x}$.

379. $y=(x^2+2x+2)e^{-x}$.

380. $y=\ln\left(3x^2+\sqrt{9x^4+1}\right)$.

381. $y=\operatorname{arctg}\sqrt{4x^2-1}$.

382. $y=\arccos\dfrac{9-x^2}{9+x^2}$.

383. $y=\lg(x-\cos x)$.

384. $y=5\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{8}$.

385. $y=3\cos^2 x-\cos^3 x$.

386. $y=\sin x\, e^{\cos x}$.

387. $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}\left(x^2+\sqrt{1+x^4}\right)}$.

388. $y=\cos\dfrac{1}{x}$.

389. $y=e^{-\frac{x^2}{2}}$.

390. $y=2^{\sin 2x}$.

391. $y=\dfrac{\sin^2 x}{1+\operatorname{ctg}x}+\dfrac{\cos^2 x}{1+\operatorname{tg}x}$.

392. $y=\ln|\sin x|$.

393. $y=\sin\ln|x|$.

394. $y=\operatorname{arcctg}\ 2^x$.

395. $y=\ln(\sec x+\operatorname{tg}\ x)$.

396. $y=e^{\sqrt{2x}}\cdot\left(\sqrt{2x}-1\right)$.

397. $y=\ln\dfrac{x^5}{x^5+2}$.

398. $y=\arcsin\dfrac{\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$.

399. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x-1}$.

400. $y=\dfrac{2\sin^2 x}{\cos 2x}$.

401. $y=e^{2x+3}\left(x^2-x+\dfrac{1}{2}\right)$.

402. $y=\arcsin\sqrt{\sin x}$.

403. $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

404. $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{\sqrt{2}\cdot x}$.

405. $y=\sin\cos^2 x\cdot\cos\sin^2 x$.

406. $y=\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\cos x\ln\operatorname{tg} x$.

407. $y=\frac{x}{2}(\sin\ln x+\cos\ln x)$.

408. $y=\cos^n x\cdot\cos nx$.

409. $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sin x\right)$.

410. $y=2^{\sin x^2}$.

411. $y=3^{\cos^2 x}$.

412. $y=\ln\frac{1-e^x}{e^x}$.

413. $y=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$.

414. $y=\frac{\sin^2 x}{1+\operatorname{ctg} x}+\frac{\cos^2 x}{1+\operatorname{tg} x}$.

415. $y=\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}-$
$-\operatorname{ctg} x\ln(1+\sin x)-x$.

416. $y=x(\arcsin x)^2-2x+$
$+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x$.

417. $y=\operatorname{arctg}\operatorname{tg}^2 x$.

418. $y=\ln\ln\ln x^2$.

419. $y=\ln\left(\sqrt{2}\cos x+\sqrt{\cos 2x}\right)$.

420. $y=\ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$.

421. $y=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\sin x}{2}\right)$.

422. $y=x^{\frac{7}{\ln x}}$.

423. $y=x^{x^2}$.

424. $y=x^5+2x^4-3x^3-x^2-$
$-\frac{1}{2}x+10$. $y^{(IV)}=?$ $y^{(V)}=?$

425. $y=2^x$. $y^{(n)}=?$

426. $y=\frac{x}{6(x+1)}$. $y^{(3)}=?$

427. $y=\frac{1}{2}\ln^2 x$. $y^{(3)}=?$

428. $y=(2x+3)^3\cdot\sqrt{2x+3}$.
$y^{(3)}=?$

429. $y=x^n\sqrt{x}$. $y^{(n)}=?$

430. $y=5-3\cos^2 x$. $y^{(n)}=?$

431. $y=2^x+2^{-x}$. $y^{(n)}=?$

432. $y=e^x\sin x$ булса, $y''-2y'+2y=0$ булганлыгын исбатлагыз.

433. $y=\sqrt{2x-x^2}$ булса, $y^3\cdot y''+1=0$ булганлыгын исбатлагыз.

434. $y=e^{4x}+2e^{-x}$ булса, $y'''-13y'-12y=0$ булганлыгын исбатлагыз.

435. $y=\cos e^x+\sin e^x$ булса, $y''-y'+ye^{2x}=0$ булганлыгын исбатлагыз.

436. $y = e^{a \arcsin x}$ булса, $(1-x^2)\,y'' - xy' - a^2y = 0$ булганлыгын исбатлагыз.

Әгәр y функциясе t параметры аркылы $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ рәвешендә бирелгән булса, аның чыгарылмасы $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ формуласы аша табыла. Икенче тәртип чыгарылма болай табыла:

$$y''_{xx} = \frac{y''_{tt} \cdot x'_t - x''_{tt} \cdot y'_t}{(x'_t)^3}.$$

437. $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1, \\ y = 3t^5 + 5t^3 + 1. \end{cases}$ $\quad y'_x = \dfrac{dy}{dx} = ?$

Чишү. Башта без $\dfrac{dx}{dt}$ һәм $\dfrac{dy}{dt}$ ны табабыз:

$$\frac{dx}{dt} = 3t^2 + 3; \quad \frac{dy}{dt} = 15t^4 + 15t^2.$$

Димәк, $\dfrac{dy}{dx} = y'_x = \dfrac{15t^4 + 15t^2}{3t^2 + 3} = 5t^2.$

438. $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t. \end{cases}$ $\quad y'_x = \dfrac{dy}{dx} = ?$

Чишү. $\dfrac{dx}{dt} = -a\sin t$, $\dfrac{dy}{dt} = a\cos t$. Димәк, $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{a\cos t}{a\sin t} = -\operatorname{ctg} x.$

439. $\begin{cases} x = e^{-t}\sin t, \\ y = e^{t}\cos t. \end{cases}$ $\quad y'_x = \dfrac{dy}{dx} = ?$

Чишү. $\dfrac{dx}{dt} = e^{-t}(\cos t - \sin t)$; $\dfrac{dy}{dt} = e^{t}(-\sin t + \cos t)$.

Моннан $y'_x = \dfrac{e^{t}(-\sin t + \cos t)}{e^{-t}(\cos t - \sin t)} = e^{2t}.$

440. $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$ $\quad y' = ?\ y'' = ?$

Чишү. $y'_x = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3a\sin^2 t \cdot \cos t}{-3a\cos^2 t \cdot \sin t} = -\operatorname{tg} t$; $\left(t \neq \dfrac{2k+1}{2}\pi,\ \ k \in Z\right)$.

$$y''_{xx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(-tg\ t)'_t}{(a\cos^3 t)'_t} = \frac{-\sec^2 t}{-3a\cos^2 t\sin t} = \frac{1}{3a\sin t\cos^4 t}.$$

441. $\begin{cases} x = n\sin t + \sin nt, \\ y = n\cos t + \cos nt. \end{cases}$ $y'_x(0) = ?$

Чишү. $\dfrac{dx}{dt} = n\cos t + n\cos nt,\ \dfrac{dy}{dt} = -n\sin t - n\sin nt.$

Димәк, $y'_x = \dfrac{-n(\sin t + \sin nt)}{n(\cos t + \cos nt)} = -\dfrac{2\sin\frac{t+nt}{2}\cdot\cos\frac{t-nt}{2}}{2\cos\frac{t+nt}{2}\cdot\cos\frac{t-nt}{2}} = -\mathrm{tg}\,\dfrac{(n+1)t}{2}.$

Шулай итеп, $y'_x(0) = -\mathrm{tg}\,\dfrac{(n+1)\cdot 0}{2} = 0.$

КҮНЕГҮЛӘР

Түбәндәге функцияләрнең чыгарылмаларын табыгыз:

442. $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3. \end{cases}$

443. $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = t + \sin t. \end{cases}$

444. $\begin{cases} x = a\cos^2 t, \\ y = b\sin^2 t. \end{cases}$

445. $\begin{cases} x = \cos^3 \varphi, \\ y = \sin^3 \varphi. \end{cases}$

446. $\begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = t^3. \end{cases}$

447. $\begin{cases} x = t^2 + 6t + 5, \\ y = \dfrac{t^3 - 54}{t}. \end{cases}$

448. $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$

449. $\begin{cases} x = \arccos\sqrt{t}, \\ y = \sqrt{t - t^2}. \end{cases}$ $y'' = ?$

450. $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = \dfrac{1}{t}. \end{cases}$ $y^{(n)} = ?$

451. $\begin{cases} x = at + b, \\ y = 5t^2 + 3t + 2. \end{cases}$ $y^{(3)} = ?$

Түбәндәге ачык булмаган функцияләрнең y'_x чыгарылмасын табыгыз:

452. $x^2 + y^2 = 4.$

453. $x^3 + \ln y - x^2 e^y = 0.$

454. $x^3 + y^3 - 3xy = 0.$

455. $x^{y^2} + y^2 \ln x - 4 = 0.$

456. $\sin(y - x^2) - \ln(y - x^2) + 2\sqrt{y - x^2} - 3 = 0.$

457. $x^4 - 6x^2y^2 + 9y^4 - 5x^2 + 15y^2 - 100 = 0.$

458. $\dfrac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}} - \sqrt[3]{\dfrac{y}{x}} = 0.$

VII бүлек

ФУНКЦИЯ ҮЗЛЕКЛӘРЕН ӨЙРӘНГӘНДӘ ЧЫГАРЫЛМАНЫ КУЛЛАНУ

7.1. Экстремум булуның кирәкле шарты

$y=f(x)$ функциясе ниндидер $x=c$ ноктасында дифференциалланучы булсын. Әгәр c ноктасы бу функциянең экстремум ноктасы булса, шул ноктада аның чыгарылмасы нульгә тигез була яки бөтенләй булмый.

7.2. Экстремум булуның җитәрлек шарты

$y=f(x)$ функциясе $x=c$ ноктасында өзлексез һәм бу ноктаның $[c-\delta,\ c]$ һәм $[c,\ c+\delta]$ аралыкларында функциянең дифференциалланырлык $[c-\delta,\ c+\delta]$ тирәлеге булсын. Өстәвенә аралыкларда функциянең чыгарылмасы үзенең тамгасын сакласын.

Әгәр $[c-\delta, c]$ һәм $[c, c+\delta]$ аралыкларында чыгарылманың тамгасы төрле булса, c ноктасы экстремум ноктасы була.

7.3. Функциянең кисемтәдәге иң зур һәм иң кечкенә кыйммәтләрен табу

Дифференциалланучы $f(x)$ функциясенең $[a, b]$ кисемтәсендәге иң зур (иң кечкенә) кыйммәтен табу өчен, түбәндәгеләрне башкарырга кирәк:

а) бирелгән функциянең чыгарылмасын табарга;

б) $f(x)$ функциясенең $]a, b[$ интервалындагы критик нокталарын табарга;

в) $f(x)$ функциясенең критик нокталардагы кыйммәтләрен исәпләргә;

г) функциянең $[a,\ b]$ кисемтәсенең очларындагы кыйммәтләрен, ягъни $f(a)$ һәм $f(b)$ ны исәпләп чыгарырга;

д) табылган кыйммәтләр арасыннан иң зур (иң кечкенә) кыйммәтне сайлап алырга.

7.4. Функцияне тулысынча тикшерү һәм аның графигын төзү

Түбәндәге схеманы кулланырга мөмкин:

1. Функциянең билгеләнү өлкәсен табарга.

2. Функциянең җөп, так, периодик булу-булмавын ачыкларга.

3. Функциянең билгеләнү өлкәсе чикләрендә үз-үзен тотуын тикшерергә; өзелү нокталарын табып, аларның характерларын ачыкларга; асимптоталарның барысын да табарга.

4. Графикның координаталар күчәрләре белән кисешү нокталарын табарга һәм сан турысындагы аерым интервалларда функциянең нинди тамга алуын ачыкларга.

5. Функциянең экстремумы булу-булмавын тикшерергә; экстремум нокталарын табарга.

6. Кәкренең батынкылыгы юнәлешен ачыкларга; кире бөгелү нокталарын табарга.

7. Аргументның кайбер кыйммәтләре өчен функциянең кыйммәтләрен табып, таблица төзергә.

8. Табылган барлык нәтиҗәләргә таянып, функциянең графигын сызарга.

1. $y = x^3 - 3x$ функциясенең үсү аралыкларын табарга.

Чишү. Иң элек бирелгән функциянең чыгарылмасын табыйк: $y' = 3x^2 - 3$. Аннан соң $y' > 0$ булган кыйммәтләрен исәплик: $3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) > 0$, $|x| > 1$. Димәк, бу функция $x < -1$ һәм $x > 1$ булганда үсә.

2. $y = x^2 - 4x + 5$ функциясенең үсү һәм кимү интервалларын табарга.

Чишү. Чыгарылмасын табабыз: $y' = 2x - 4$. Әгәр $x > 2$ булса, $2x - 4 > 0$ була. Әгәр $x < 2$ булса, $2x - 4 < 0$. Димәк, $]-\infty; 2[$ интервалында функция кими, $]2; +\infty[$ интервалында үсә.

3. $y = \frac{1}{2}x - \sin x$ $(0 \le x \le 2\pi)$ функциясенең үсү һәм кимү интервалларын табарга.

Чишү. Бу функциянең чыгарылмасы $y' = \frac{1}{2} - \cos x$. $\left]\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right[$ аралыгында $y' > 0$ була. Шуңа күрә бу аралыкта функция үсә. Ә $\left]\frac{5\pi}{3}; 2\pi\right[$ аралыгында $y' < 0$ һәм бу аралыкта функция кими.

4. $y = x^3 - 3x^2$ функциясе бирелгән $x = 3$, $x = 1$, $x = -1$, $x = \frac{1}{2}$ нокталарның кайсысында үсә, кайсысында кими?

Чишү. Чыгарылмасын табабыз: $y' = 3x^2 - 6x$.

$x = 3$ булганда, $y' = 9 > 0$ була. Димәк, функция үсә;

$x = 1$ булганда, $y' = -3 < 0$ була. Димәк, функция кими;

$x = -1$ булганда, $y' = 9 > 0$ була. Димәк, функция үсә;

$x = \frac{1}{2}$ булганда, $y' = -2{,}25 < 0$ була. Димәк, функция кими.

КҮНЕГҮЛӘР

Түбәндәге функцияләрнең үсү һәм кимү интервалларын табыгыз:

459. $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 4$.

460. $y = \frac{1}{4}x^3 - 2x^2$.

461. $y = x^3 + 3x^2 + 3x$.

462. $y = x^3 - 3x + 5$.

463. $y = k^x$.

464. $y = \sqrt{(x^2 - 9)^3}$.

465. $y = \cos x - x$.

466. $y = x|x|$.

467. $y = \ln(x^2 + 2x - 3)$ функциясенең $x_1 = 2$ ноктасында үсүен, ә $x_2 = -4$ ноктасында кимүен күрсәтергә.

468. $y = \sin x + \cos x$ функциясенең $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -\frac{\pi}{3}$, $x_4 = 2$ нокталарында үз-үзен тотышын ачыкларга.

469. $y = x \operatorname{arctg} x$ функциясенең $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ нокталарында үз-үзен тотышын ачыкларга.

5. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$ функциясенең экстремаль кыйммәтләрен табарга.

Чишү.

1) Чыгарылманы табабыз:

$$y' = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2).$$

2) x аргументының критик кыйммәтләрен табу өчен, $x^2 - 3x + 2 = 0$ тигезләмәсен чишәбез: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

3) Аргументның бу критик кыйммәтләренә якын кыйммәтләре өчен, ягъни $]1 - \delta; 1[$ һәм $]1; 1 + \delta[$ (биредә $0 < \delta < 1$) аралыкларында функциянең тамгасын тикшерәбез. Без $\delta = 0{,}5$ дип алсак, $x = 1$ критик кыйммәте өчен $x = 1 - \delta = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$ булганда, $y' = 6\,(0{,}5^2 - 3 \cdot 0{,}5 + 2) > 4{,}5 > 0$ була, $x = 1 + \delta = 1{,}5$

булганда, $y' = 6(1{,}5^2 - 3 \cdot 1{,}5 + 2) = -1{,}5 < 0$ була. Чыгарылманың тамгасы башта «+», аннары «−» булганын күрәбез. Димәк, $x = 1$ булганда, бирелгән функция максималь кыйммәтен ала. Аннары соң $x = 2$ критик кыйммәтенә якын булган кыйммәтләре өчен, ягъни $]2-\delta;\ 2[$ һәм $]2;\ 2+\delta[$ (биредә $0 < \delta < 1$) аралыкларында функциянең тамгасын тикшерәбез. Без $\delta = 0{,}5$ дип алсак, $x = 2$ критик кыйммәте өчен $x = 2 - \delta = 1{,}5$ булганда, $y' = 6(1{,}5^2 - 3 \cdot 1{,}5 + 2) = -1{,}5 < 0$; $x = 2 + \delta = 2{,}5$ булганда, $y' = 6(2{,}5^2 - 3 \cdot 2{,}5 + 2) = 4{,}5 > 0$. Димәк, $x = 2$ булганда, функция минималь кыйммәтен ала. Бирелгән функциягә $x = 1$, $x = 2$ саннарын куеп, аның максималь һәм минималь кыйммәтләрен табабыз: $y_{max} = 0$, $y_{min} = -1$.

КҮНЕГҮЛӘР

Түбәндәге функцияләрнең экстремумнарын табыгыз:

470. $y = 3x^2 - 6$.

471. $y = (x-5)e^x$.

472. $y = x\sqrt{1-x^2}$.

473. $y = (x-1)^4$.

474. $y = 1 - \sqrt[5]{(x-2)^4}$.

475. $y = \sqrt[3]{(x-2)^2}\,(2x+1)$.

476. $y = x - \ln(1+x)$.

477. $y = \dfrac{4\sqrt{3}}{9x\sqrt{1-x}}$.

478. $y = \left(x^2 - 2x\right)\ln x - \dfrac{3}{2}x^2 + 4x$.

479. $y = \dfrac{2-x}{\pi}\cos\pi(x+3) + \dfrac{1}{\pi^2}\sin\pi(x+3)$.

480. $y = \dfrac{1}{2}\left(x^2 - \dfrac{1}{2}\right)\arcsin x + \dfrac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} - \dfrac{\pi}{12}x^2$.

481. $y = \dfrac{30}{12 - 36x^2 + 20x^3 - 3x^4}$.

482. $y = \sqrt{e^{x^2} - 1}$.

6. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 1$ функциясенең $[0; 4]$ кисемтәсендәге иң зур һәм иң кечкенә кыйммәтләрен табарга.

Чишү. Функция чыгарылмасын табабыз:

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2).$$

Моннан критик нокталар җиңел табыла: $x = 1$, $x = 2$.

$f(x)$ функциясенең критик нокталарындагы һәм кисемтә очларындагы кыйммәтләрен табабыз:

$f(1) = 4$, $f(2) = 3$, $f(0) = -1$, $f(4) = 31$.

Шулай итеп, бу функциянең $[0; 4]$ кисемтәсендәге иң зур кыйммәте — $f(4) = 31$, иң кечкенәсе $f(0) = -1$ гә тигез.

7. $y = 3x - x^3$ функциясенең $[-2; 3]$ кисемтәсендәге иң зур һәм иң кечкенә кыйммәтләрен табарга.

Чишү. Чыгарылмасын табабыз: $f'(x) = 3 - 3x^2 = 3(1 - x^2) = 3(1-x)(1+x)$.

Моннан критик нокталарын эзлибез: $3(1-x)(1+x) = 0$, $x = 1$, $x = -1$.

Бирелгән функциянең критик нокталарындагы һәм кисемтә очларындагы кыйммәтләрен табабыз:

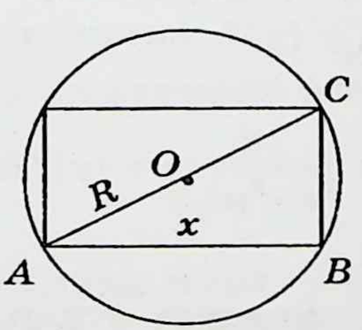
$$f(1) = 2,\ f(-1) = -2,\ f(-2) = 2,\ f(3) = -18.$$

Шулай итеп, бу функциянең $[-2; 3]$ кисемтәсендәге иң зур кыйммәте 2 гә, иң кечкенә кыйммәте -18 гә тигез була.

Күп очракларда геометрик һәм физик мәсьәләләрне чишкәндә, ниндидер функциянең иң зур һәм иң кечкенә кыйммәтләрен табарга туры килә.

8. Радиусы R булган түгәрәккә камалган турыпочмаклыкларның иң зур мәйданлысын табарга.

Мәсьәләне чишү өчен, аның шартына таянып, $S(x)$ функциясен төзергә һәм аның экстремумы булу-булмавын тикшерергә, ягъни бәйсез үзгәрешле x ның кыйммәте аларга тигез булганда, турыпочмаклыкның мәйданы $S(x)$ иң зур кыйммәткә ия булырлык кыйммәтләрен табарга кирәк була.



Рәс. 1

x бәйсез үзгәрешле булсын. Мәсьәләнең шарты буенча аргументның үзгәрү өлкәсе $0 \le x \le 2R$ була. Кирәкле функцияне төзик:

$$S(x) = AB \cdot BC = x\sqrt{4R^2 - x^2} \text{ (рәс. 1)}.$$

Чыгарылманы табабыз:

$$S'(x) = \sqrt{4R^2 - x^2} - x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{4R^2 - x^2}} = \frac{2(2R^2 - x^2)}{\sqrt{4R^2 - x^2}}.$$

$S'(x) = 0$ тигезләмәсеннән $2R^2 - x^2 = 0$, $x = R\sqrt{2}$ килеп чыга. Әгәр $4R^2 - x^2 = 0$ булса, $x = 2R$. Ләкин ул мәсьәлә шартын канәгатьләндерми (бу очракта турыпочмаклык булмый). Шуңа күрә мәйдан иң зур кыйммәтен $x = R\sqrt{2}$ дә ала. xның бу кыйммәте өчен турыпочмаклыкның икенче ягын табабыз: $BC = \sqrt{4R^2 - 2R^2} = R\sqrt{2}$. Димәк, ягы $R\sqrt{2}$ булган квадрат бу очракта иң зур мәйданга ия булыр: $S(R\sqrt{2}) = 2R^2$.

9. Тулы өслеге S булган цилиндрларның иң зур күләмлесен табарга.

Чишү. Цилиндр нигезенең радиусын x дип, ә биеклеген y дип тамгаласак, аның тулы өслеге $S = 2\pi x^2 + 2\pi xy$ була. Шулай итеп,

$$y = \frac{S - 2\pi x^2}{2\pi x} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{S}{x} - 2\pi x\right).$$

Ул вакытта цилиндрның күләме $V = \pi x^2 \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{S}{x} - 2\pi x\right) = \frac{S}{2}x - \pi x^3$ ка тигез була. Мәсьәлә шушы функциянең, $x > 0$ булганда, иң зур кыйммәтен табуга кайтып кала:

$$V'_x = \frac{S}{2} - 3\pi x^2; \ \frac{S}{2} - 3\pi x^2 = 0, \ x = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}.$$

Икенче чыгарылманы табабыз: $V_{xx}'' = -6\pi x$.

Шулай итеп, $x = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ булганда, $V_{xx}'' < 0$ була. Димәк, без эзли торган цилиндрның иң зур күләмлесе

$$y = \frac{S - 2\pi \cdot \frac{S}{6\pi}}{2\pi\sqrt{\frac{S}{6\pi}}} = 2\sqrt{\frac{S}{6\pi}} = 2x$$

булганда, ягъни күчәр мәйданы кисемендә квадрат ятканда була икән.

10. Периметры $2p$ булган турыпочмаклыкларның иң зур мәйданга ия булганын табарга.

Турыпочмаклыкның бер ягын x дип тамгалыйк. Моннан $S(x) = (p - x) \cdot x = px - x^2$ $(0 < x < p)$ булганлыгы билгеле.

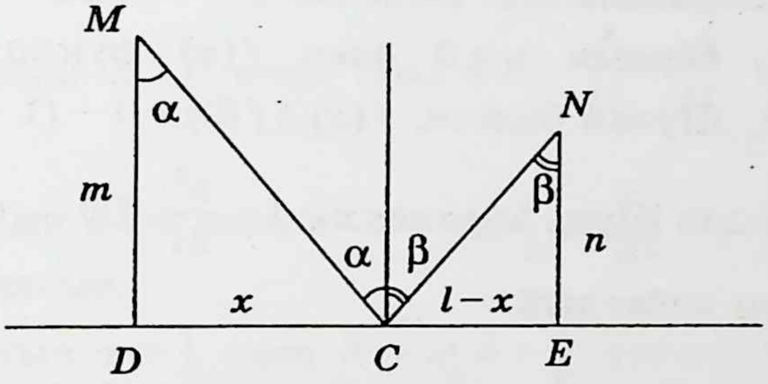
Килеп чыккан $S(x)$ функциясенең экстремумын табабыз:

$$S'(x) = p - 2x = 0.$$

Моннан $x = \frac{p}{2}$ була. Димәк, турыпочмаклыкның икенче ягы $p - x = p - \frac{p}{2} = \frac{p}{2}$. Моннан турыпочмаклыкның ягы $\frac{p}{2}$ булган квадрат икәнлеге килеп чыга.

Чишкән мәсьәләләрдән мондый нәтиҗә ясарга була: *периметрлары бирелгән турыпочмаклыкларның иң зур мәйданлысы квадрат була* икән. Гомумән, бирелгән периметрлы n-почмаклыкның иң зур мәйданлысы төзек n-почмаклык була.

11. Юлның бер үк ягында, аннан тиңдәшле m һәм n ераклыгында, M һәм N авыллары урнашкан. $MC + CN$ аралыгы иң кечкенә булсын өчен, C станциясен кайда салырга кирәк?



Рәс. 2

Чишү. DC арасын x аша тамгаласак, $CE = l - x$ була $(DE = l)$. Моннан $MC = \sqrt{m^2 + x^2}$, $NC = \sqrt{n^2 + (l - x)^2}$. Ул вакытта без эзли торган $S(x) = MC + NC = \sqrt{m^2 + x^2} + \sqrt{n^2 + (l - x)^2}$. Табылган функцияне экстремумга тикшерәбез:

$$S'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{m^2 + x^2}} + \frac{2(l-x)}{2\sqrt{n^2 + (l-x)^2}} = \frac{x}{\sqrt{m^2 + x^2}} - \frac{(l-x)}{\sqrt{n^2 + (l-x)^2}} = 0.$$

Шуңа күрә $\frac{x}{\sqrt{m^2 + x^2}} = \frac{(l-x)}{\sqrt{n^2 + (l-x)^2}}$, ягъни $\frac{DC}{MC} = \frac{CE}{CN}$. Моннан $\sin\alpha = \sin\beta$. Димәк, $\alpha = \beta$.

Шулай итеп, әгәр төшү почмагы кайтарылу почмагына тигез булса, $MC + CN$ суммасы иң кечкенә була. Нәкъ шушы урында C станциясен төзергә кирәк була да инде.

12. Барлык $x \geq 0$ өчен $e^x \geq 1 + x$ тигезсезлеге дөреслеген исбатларга.

Исбатлау. Ярдәмче $\varphi(x) = e^x - (1 + x)$ функциясен төзеп, аның чыгарылмасын табабыз. $x \geq 0$ булганда, $\varphi'(x) = e^x - 1 \geq 0$ була. Шулай булгач, $\varphi'(x) \geq 0$ булганда, $\varphi(x)$ функциясе үсүче була. Моннан $x \geq 0$ булганда, $\varphi(x) \geq \varphi(0)$ була яки $\varphi(0) = 1 - 1 = = 0$, $e^x - (1 + x) \geq 0 \Rightarrow e^x \geq 1 + x$. Бу — тигезсезлекнең дөреслеген исбатлый.

13. Барлык $x \geq 0$ өчен $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2!}$ тигезсезлеген исбатларга.

Исбатлау. Ярдәмче $f(x) = \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2!}\right)$ функциясен төзеп, аның чыгарылмасын табабыз: $f' = -\sin x + x \geq 0$, $x \geq 0$ өчен. Димәк, барлык $x \geq 0$ өчен $f(x)$ функциясе үсүче функция була. Шулай булгач, $f(x) \geq f(0) = 1 - (1 - 0) = 0$ яки $\cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2!}\right) \geq 0$. Шуңа күрә $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2!}$. Бу — тигезсезлекнең дөреслеген исбатлый.

14. Барлык $x \geq 0$ өчен $x - \frac{x^3}{3!} \leq \sin x$ тигезсезлеген исбатларга.

Исбатлау. Өстәмә $\varphi(x) = \sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)$ функциясен төзеп, аның чыгарылмасын табабыз: $\varphi'(x) = \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2!}\right) \geq 0$ (исбат ителгән 13 нче мисалга таянып).

Димәк, $\varphi(x)$ функциясе барлык $x \geq 0$ өчен дә үсүче була. Шулай булгач, $\varphi(x) \geq \varphi(0) = 0 \Rightarrow \sin x \geq x - \frac{x^2}{3!}$ яки $\sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) \geq 0$.

КҮНЕГҮЛӘР

Түбәндәге функцияләрнең бирелгән кисемтәдә иң зур һәм иң кечкенә кыйммәтләрен табыгыз:

483. $y = x^4 - 2x^2 + 3, \quad [-3; 2]$.

484. $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 10, \quad [0; 3]$.

485. $y = x - 2\ln x, \quad [1; e]$.

486. $y = 2\sin x + \cos 2x, \quad [0; \frac{\pi}{2}]$.

487. $y = \frac{x-1}{x+1}, \quad [0; 4]$.

488. $y = \sin 2x - x, \quad [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

489. $y = 2\,\mathrm{tg}\,x - \mathrm{tg}^2 x, \quad [0; \frac{\pi}{2}]$.

490. $y = x^x, \quad [0{,}1; \infty]$.

491. $y = \sqrt[3]{(x^2 - 2x)^2}, \quad [0; 3]$.

492. Барлык $x \geq 0$ өчен $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2!}$ тигезсезлеген исбатлагыз.

493. Барлык $x \geq 0$ өчен $\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ тигезсезлеген исбатлагыз.

494. Барлык $x \geq 0$ өчен $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$ тигезсезлеген исбатлагыз.

495. Барлык $x > 1$ өчен $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$ тигезсезлеген исбатлагыз.

496. Барлык $x > 0$ өчен $x > \ln(1 + x)$ тигезсезлеген исбатлагыз.

15. $f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$. **Функцияне тулысынча тикшерегез һәм аның графигын төзегез.**

Чишү. 1) Функция барлык $x \neq \pm 1$ өчен билгеләнгән.

2) $f(-x) = \frac{-x^3}{1-(-x)^2} = -\frac{x^3}{1-x^2} = -f(x)$. Димәк, $f(x)$ — так функция. Шуңа күрә аны $x \geq 0$ өчен тикшереп табылган графикны координаталар башлангычына карата чагылдыру җитә; функция периодик түгел.

3) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \frac{x^3}{1-x^2} = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \frac{x^3}{1-x^2} = -\infty$. Димәк, кәкренең $x = \pm 1$ вертикаль асимптоталары бар.

Функция — вакланмалы радикаль функция. Өстәвенә санаучының дәрәҗә күрсәткече ваклаучы дәрәҗә күрсәткеченнән бер берәмлеккә зуррак. Шуңа күрә аның $y = kx + b$ рәвешендәге авыш асимптотасы бар. Аның коэффициентларын табыйк:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{(1-x^2)x} = -1.$$

$b = \lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - kx] = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x^3}{1-x^2} + x \right) = 0$. Шулай итеп, авыш асимптотаның тигезләмәсе $y = -x$ була.

4) Функция графигының координаталар күчәрләре белән кисешү нокталарын табабыз:

Ox: $y = 0$, $x = 0$, $\quad Oy$: $x = 0$, $y = 0$.

Шулай булгач, кәкре координаталар башлангычын $(0; 0)$ ноктасында кисеп үтә.

Функциянең $]0; 1[$ һәм $]1; \infty[$ интервалларындагы тамгасын ачыклыйк:

x	$]0; 1[$	$]1; \infty[$
y	+	–

5) Функциянең чыгарылмасын табабыз:

$f'(x) = \frac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2} = 0$. Моннан $x = 0$ һәм $x = \pm\sqrt{3}$ нокталарында $f'(x) = 0$.

Икенче чыгарылманы табабыз:

$$f''(x) = \frac{2x(x^2+3)}{(1-x^2)^3}, \; f''(0) = 0, \; f''(\sqrt{3}) < 0.$$

Димәк, $x = \sqrt{3}$ ноктасы максимум ноктасы була.

6) Кире бөгелү ноктасын эзлибез:

$$2x(x^2 + 3) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

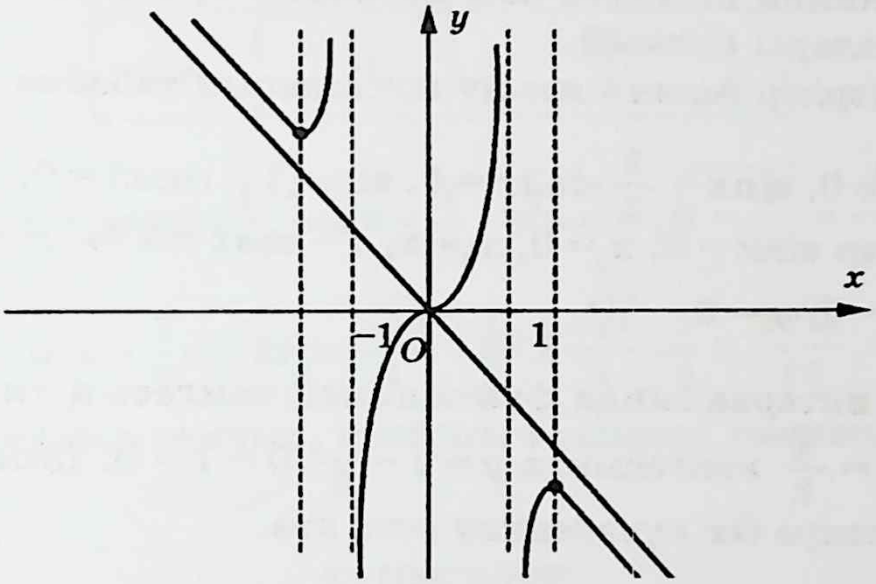
$x = 0$ ноктасы аша үткәндә, f'' тамгасын алыштыра, шуңа күрә $x = 0$ ноктасы *кире бөгелү ноктасы* була.

7) Кәкренең батынкылыгы белән ничек юнәлгәнлеген тикшерик. Моның өчен икенче чыгарылманың]0; 1[һәм]1; +∞[интервалларында тамгасын билгелик. Аннары аргументның кайбер кыйммәтләре өчен функциянең кыйммәтләрен табабыз һәм таблица төзибез:

x	]0; 1[	]1; ∞ [
y''	+	−
y	∪	∩

x	0	0,5	2
y	0	0,16	−2,6

8) Тикшерүнең нәтиҗәләреннән файдаланып, функциянең графигын төзибез:



Рәс. 3

16. $y = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x$ функциясен тулысынча тикшерергә һәм аның графигын төзергә.

Чишү.

1) Бирелгән функция барлык саннар күчәрендә билгеләнгән. Күренгәнчә, ул өзлексез функцияләр суммасыннан тора.

2) Так функция, чөнки ике так функция суммасыннан тора. Периодик функция, чөнки барлык x өчен $f(x+l) = f(x)$ тигезлеге үтәлә:

$$\sin(x+l) - \frac{1}{2}\sin 2(x+l) = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x.$$

$x = 0$ булганда, $\sin l - \frac{1}{2}\sin 2l = 0$, $\sin t\,(1 - \cos l) = 0$. Моннан $\sin l = 0 \to l = \pi$, $l = 2\pi$; $1 - \cos l = 0$. $l = 0$; $l = 2\pi$. Периоды $l = 2\pi$.

$l=\pi$ аның периоды булмаганлыгын күрсәтеп үтик.

Дөрестән дә, $\sin(x+\pi)-\frac{1}{2}\sin 2(x+\pi)=-\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x$. Периоды $l=2\pi$ булганга, бирелгән функцияне $-\pi$ дән π гә кадәрге интервалда тикшерергә һәм $[-\pi;\pi]$ кисемтәсендә генә графигын сызарга мөмкин. Бирелгән функция так булганга, аны, 0 дән π гә кадәр арада тикшереп, $[0;\pi]$ кисемтәсендә төзибез һәм, күчәрләр башлангычына симметрик булганга, $[-\pi;0]$ кисемтәсенә чагылдырабыз. Ул вакытта график $[-\pi;\pi]$ кисемтәсендә төзелгән була. Функция периодик булганлыктан, аны барлык саннар күчәренә дәвам итә алабыз.

3) Функция өзлексез һәм периодик булганга күрә, аның асимптоталары булмый.

4) Күчәрләр белән кисешү нокталарын табабыз:

Ox: $y=0$, $\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x=0$, $\sin x(1-\cos x)=0$.

Әгәр $\sin x=0$, $x_1=0$, $x_2=\pi$; $1-\cos x=0\rightarrow x=0$.

Oy: $x=0$, $y=0$.

$[0;\pi]$ интервалында функциянең тамгасын тикшерәбез. Әйтик, $x=\frac{\pi}{2}$ ноктасында $y=1-\frac{1}{2}\cdot 0=1>0$. Димәк, бу кисемтәдә кәкре Ox күчәреннән өстә ята.

5) $y'=\cos x-\cos 2x=0$; $2\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}=0$. Моннан $\frac{3x_1}{2}=0\rightarrow$ $\rightarrow x_1=0$; $\frac{3x_2}{2}=\pi\rightarrow x_2=\frac{2\pi}{3}$; $\frac{x_3}{2}=0\rightarrow x_3=0$. Димәк, $[0;\pi]$ интервалында $x=0$, $x=\frac{2\pi}{3}$ стационар нокталар булып торалар.

Икенче чыгарылманы табабыз:

$$y''=-\sin x+2\sin 2x=\sin x(4\cos x-1).$$

а) $x=0$ ноктасында функциянең экстремумы юк.

б) $y''\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{2}<0$. Моннан $x=\frac{2\pi}{3}$ ноктасы максимум ноктасы була.

6) Кире бөгелү ноктасын табабыз: $y''=0$.

Шулай булгач, $x = 0$, $x = \pi$ нокталарыннан үткәндә, икенче чыгарылманың тамгасы алмашына, шуңа күрә алар функциянең кире бөгелү нокталары була:

$$4\cos x - 1 = 0 \Rightarrow x = \arccos\frac{1}{4}.$$

Шулай булгач, $x = \arccos\frac{1}{4}$ ноктасы аша үткәндә, функциянең тамгасы «+» тән «–» ка күчә. Бу нокта кире бөгелү ноктасы булып тора.

Кайбер кыйммәтләре өчен таблица төзибез:

x	0	$\arccos\frac{1}{4}$
y	0	$\frac{3}{4}$

Чөнки $x = \arccos\frac{1}{4}$, $\cos x = \frac{1}{4}$, $\sin x = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

$$y = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x = \frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{1}{2}\cdot 2\frac{\sqrt{15}}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{3\sqrt{15}}{16} \approx \frac{3}{4}.$$

Нәтиҗәләргә таянып, графигын сызуны үзегезгә тәкъдим итәбез.

КҮНЕГҮЛӘР

Чыгарылмалар ярдәмендә түбәндәге функцияләрнең графикларын төзегез:

497. $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$.

498. $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$.

499. $y = \ln x - \ln(x - 1)$.

500. $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$

501. $y = 3\sqrt[3]{x} - x$.

502. $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

503. $y = (x - 1)\sqrt{x}$.

504. $y = x + e^{-x}$.

505. $y = e^{2x - x^2}$.

506. $y = \frac{x^3}{(x-2)^2}$.

507. $y = x^2 \cdot e^{-x}$.

508. $y = x + \frac{\ln x}{x}$.

509. $y = \ln\cos x$.

510. $y = \cos x - \ln\cos x$.

511. $y = x - |\sin x|$.

7.5. Параметрик юл белән бирелгән функцияләрнең графигын төзү

Параметрик юл белән бирелгән функцияләрнең графикларын сызганда, x һәм yлар t параметры өчен аерым өйрәнелә. t ∞ кә омтылганда, x һәм yның үзләрен ничек тотышларын аерым карарга кирәк.

17. Параметрик юл белән бирелгән $x=\dfrac{3at}{1+t^3}$, $y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}$ функциясенең графигын сызарга.

Чишү. Мондый кәкре $t\neq-1$ кыйммәтләре өчен билгеләнә һәм Декарт яфрагы (кәкресе) дип йөртелә.

Әгәр t -1 гә омтылса, $x\to\infty$ һәм $y\to\infty$. Авыш асимптоталарын эзлибез:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{t\to-1}\frac{\dfrac{3at^2}{1+t^3}}{\dfrac{3at}{1+t^3}}=\lim_{t\to-1}t=-1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{t\to-1}\left(\frac{3at^2}{1+t^3}+\frac{3at}{1+x^3}\right)=\lim_{t\to-1}\frac{3at(t+1)}{1+t^3}=$$

$$=\lim_{t\to-1}\frac{3at}{(1-t+t^2)}=-a.$$

Димәк, функциянең авыш асимптотасы бар, аның тигезләмәсе $y=-x-a$. Әгәр t ∞ кә омтылса, $x\to0$ һәм $y\to0$ икәнлеген истә тотарга кирәк. y_x' эзлибез:

$$y_t'=\frac{y_t'}{x_t'},\ \ y_t'=3a\frac{2t(1+t^3)-3t^4}{(1+t^3)^2}=3a\frac{t(2-t^3)}{(1+t^3)^2};$$

$$x_t'=3a\frac{1+t^3-t^3}{(1+t^3)^2}=3a\frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}.$$

Димәк, $y_x'=\dfrac{3at(2-t^3)\cdot(1+t^3)^2}{(1+t^3)^2\cdot3a(1-2t^3)}=\dfrac{t(2-t^3)}{1-2t^3}=0$.

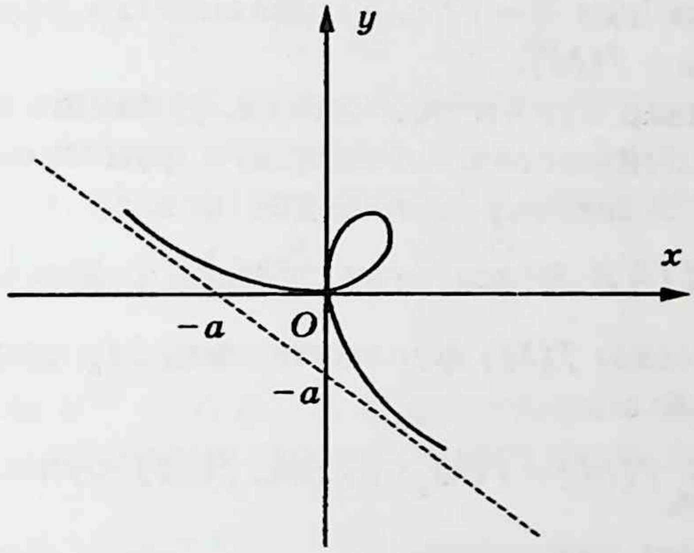
Моннан $t_1=0$, $t_2=\sqrt[3]{2}$.

Беренчедән, t ∞ кә һәм t 0 гә омтылганда, $x\to0$. Икенчедән, t ∞ кә һәм t 0 гә омтылганда, $y\to0$. Ләкин $y_x'(0)\neq y_x'(\infty)$.

Димәк, O (0; 0) ноктасы кәкреләрнең үзара кисешү ноктасы була. Таблица төзибез:

t	x	y	y'
-5	$\approx \frac{a}{8}$	$\approx -\frac{3a}{5}$	
-2	$\approx \frac{6a}{7}$	$\approx -\frac{12a}{7}$	
0	0	0	$-0+$
$\sqrt[3]{2}$	$a\sqrt[3]{2}$	$a\sqrt[3]{4}$	$+0-$

Нәтиҗәләрдән файдаланып, графикны сызабыз.



Рәс. 4

КҮНЕГҮЛӘР

Параметрик юл белән бирелгән функцияләрнең графикларын сызыгыз:

512. $x = t^3 + 3t + 1,\ y = t^3 - 3t + 1.$

513. $x = \sin^3 t,\ y = \cos^3 t,\ 0 \le t \le \pi.$

514. $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi.$

515. $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ 0 \le t \le 2\pi.$

516. $x = t \cdot e^t,\ y = t \cdot e^{-t}.$

VIII бүлек

КҮП ҮЗГӘРЕШЛЕ ФУНКЦИЯ

Үзгәрүчән өч x, y, z зурлыклары бирелгән булсын. Нинди дә булса закон буенча билгеләнү өлкәсенә кергән ике бәйсез үзгәрүчән x һәм y кыйммәтләренә тиңдәш кыйммәтле z табылса, үзгәрүчән zны *ике бәйсез үзгәрүчән* x һәм y *функция* дип атыйлар һәм $z = f(x, y)$ рәвешендә тамгалыйлар. Күп очракларда $z = f(M)$.

Реаль саннар күплегендә ике (x, y) санлы күплеге өчен аңа тиңдәшле z кыйммәте билгеләнсә, z функциясенең кыйммәтләр күплеге *билгеләнү өлкәсе* дип атала.

$\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = A$ булса, әгәр $|MM_0| < \delta$ һәм $|f(M) - f(M_0)| < \varepsilon$ булганда, A саны $f(M)$ функциясенең M_0 ноктасындагы чикләмәсе дип әйтәләр.

Әгәр $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$ булса, $f(M)$ функциясе M_0 ноктасында *өзлексез* дип атала.

$z = f(x, y, \ldots, u)$ функциясеннән x буенча аерым чыгарылма алганда, $y, \ldots, u$ аргументлары даими дип санала һәм $\frac{\partial z}{\partial x}$ яисә z'_x дип тамгалана.

Югарыдагы әйтелгәнне истә тотып бирелгән $z = f(x, y, \ldots, u)$ функциясенең дифференциалын тапканда, аларны

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} dx, \ \ldots, \ d_u z = \frac{\partial z}{\partial u} du$$

дип тамгалыйлар.

Тулы дифференциалы аерым дифференциаллар суммасына тигез була:

$$dz = d_x z + d_y z + \ldots + d_u z = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy + \ldots + \frac{\partial z}{\partial u} du .$$

Әгәр күп үзгәрешле функция катлаулы, ягъни $z = F(u, v, \dots, w)$ булса, биредә $u = f(x, y, \dots, t)$, $v = \varphi(x, y, \dots, t)$, ..., $w = \psi(x, y, \dots, t)$, ул вакытта

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \dots + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \dots + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial y},$$

. . . .

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + \dots + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial t}.$$

Инде барлык $u, v, \dots, w$ аргументлары бәйсез бер үзгәрешле x аша гына бирелгән булса, $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx} + \dots + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{dw}{dx}$ дифференциалын функциянең *тулы дифференциалы* дип атыйлар.

Әгәр функция бәйсез үзгәрүчән $x, y, \dots, t$ аргументларына карата $f(x, y, \dots, t, u) = 0$ тигезләмәсе u аргументы өчен ачык булмаган рәвештә бирелсә, $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{f'_x}{f'_u}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{f'_y}{f'_u}$; ...; $\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{f'_t}{f'_u}$ формуласы буенча исәпләнә.

Күп үзгәрешле $u = f(x, y, \dots, t)$ функциясеннән югары тәртиптәге аерым чыгарылмалар түбәндәге формулалар буенча исәпләнәләр:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u''_{xx}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u''_{xy},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = u''_{yx}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u''_{yy},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

Әгәр $f(x, y)$ функциясенең $M_0(x_0, y_0)$ ноктасында өзлексез аерым чыгарылмалары булса, ул вакытта M_0 ноктасында теләсә нинди l юнәлешендә аның чыгарылмасы була һәм ул

$$\frac{\partial f}{\partial l} = f'_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f'_y(x_0, y_0)\cos\beta$$

формуласы буенча исәпләнә (биредә $\cos\alpha$ һәм $\cos\beta$ — l турысының юнәлдерүче косинуслары).

$u = f(x, y, z)$ функциясенең аерым чыгарылмалары проекцияләре координаталар күчәренә тиңдәшле рәвештә тәңгәл килгән $u = f(x, y, z)$ функциясенең векторы *скаляр функция градиенты* дип атала һәм ул

$$grad\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

дип тамгалана.

8.1. Экстремумның кирәкле һәм җитәрлек шарты

Әгәр $z = f(x, y)$ функциясе M_0 ноктасында дифференциаллланучы булса, $f(x, y)$ функциясенең ике аерым чыгарылмасы да нульгә тигез була.

Әгәр стационар $M_0(x_0, y_0)$ ноктасында

$$f''_{xx}(x_0, y_0)\cdot f''_{yy}(x_0, y_0) - \left[f''_{xy}(x_0, y_0)\right]^2 > 0$$

шарты үтәлсә, M_0 ноктасында $z = f(x, y)$ функциясенең экстремумы була. Әгәр $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ булса, ул — «min», әгәр $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ булса, «max» була.

M_0 ноктасында өслеккә орынучы яссылык тигезләмәсе

$$(x - x_0)F_x'(M_0) + (y - y_0)\,F_y'(M_0) + (z - z_0)\,F_z'(M_0) = 0$$

рәвешендә языла.

Шул ук M_0 ноктасы аша үтүче яссылыкка перпендикуляр яссылык *нормаль* дип атала һәм

$$\frac{x - x_0}{F_x'(M_0)} = \frac{y - y_0}{F_y'(M_0)} = \frac{z - z_0}{F_z'(M_0)}$$

формуласы белән бирелә.

1. $z = \sqrt{4 - x^2 - 9y^2} + 3xy - y^2$ функциясенең билгеләнү өлкәсен табарга.

Чишү. Бирелгән функциянең билгеләнү өлкәсе $D\ (z)$ ике $z_1 = \sqrt{4 - x^2 - 9y^2}$ һәм $z_2 = 3xy - y^2$ аналитик аңлатмаларның кисешү өлкәләреннән гыйбарәт була. Дөрестән дә, беренче аңлатма барлык $(x, y) \in R^2$ өчен, ягъни $4 - x^2 - 9y^2 \geq 0$ булганда мәгънәгә ия.

Моннан $x^2 + 9y^2 \leq 4$ яки $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{4}{9}} \leq 1$. Ә икенче $3xy - y^2$ аңлатмасы R^2 яссылыгында билгеләнгән. Димәк, функция $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{4}{9}} = 1$ эллипсының эчке ноктамарында билгеләнгән була:

$$D(z)=\left\{(x,y)\in R^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{4}+\frac{9y^2}{4}\le 1\right\}.$$

2. $z=\arccos\dfrac{x+2}{y}$ функциясенең билгеләнү өлкәсен табарга.

Чишү. Бирелгән функция аргументының модуле 1 дән зур булмаган барлык нокталарда билгеләнә. Ягъни

$$\begin{cases} -1\le \dfrac{x+2}{y}\le 1, \\ y\ne 0. \end{cases}$$

Ә бу түбәндәге тигезләмәләр системасына тигез көчле була:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y\ge 0, \\ -y\le x+2\le y; \end{cases} \\ \begin{cases} y<0, \\ y\le x+2\le -y; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y>0, \\ y\ge x+2, \\ y\ge -x-2; \end{cases} \\ \begin{cases} y<0, \\ y\le x+2, \\ y\le -x-2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Димәк,

$$D(z)=\left[(x,y)\in R^2 \,\middle|\, \begin{cases} y>0, \\ y\ge x+2, \\ y\ge -x-2 \end{cases} \text{ яисә } \begin{cases} y<0, \\ y\le x+2, \\ y\le -x-2 \end{cases}\right].$$

3. $z=\ln\dfrac{(x^2-y-4)}{y-1}$ функциясенең билгеләнү өлкәсен табарга.

Чишү. Бирелгән функциянең билгеләнү өлкәсе булып, $\ln\dfrac{(x^2-y-4)}{y-1}$ вакланмасының санаучысы һәм ваклаучысы өлкәләре кисешүдән килеп чыккан өлкә санала. Әлбәттә, $y-1\ne 0$ булырга тиеш.

Димәк, $D(z)$ ны табу түбәндәге тигезсезлекләр системасын чишүгә кайтып кала:

$$\begin{cases} x^2-y-4>0, \\ y-1\ne 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y<x^2-4, \\ y\ne 1. \end{cases}$$

$y=x^2-4$, $y=1$ функцияләренең графикларын сызсак, билгеләнү өлкәсе түбәндәгегә тигез икәнлеге ачык күренәчәк:

$$D(z)=\left\{(x,y)\in R^2 \,\middle|\, \begin{array}{l} y<x^2-4 \\ y\ne 1 \end{array}\right\}.$$

4. $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ функциясенең билгеләнү өлкәсен табарга.

Чишү. Бирелгән функциянең билгеләнү өлкәсе $\sqrt{4 - x^2 - y^2}$ һәм $\sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ аналитик аңлатмаларының кисешү өлкәләреннән гыйбарәт. Ягъни

$$\begin{cases} 4 - x^2 - y^2 \geq 0, \\ x^2 + y^2 - 1 \geq 0. \end{cases}$$

Шушы тигезсезлекләр системасын чишеп табабыз:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4, \\ x^2 + y^2 \geq 1. \end{cases}$$

Димәк, билгеләнү өлкәсе булып ябык боҗра тора:

$$D(z) = \left\{ (x, y) \in R^2 \,\middle|\, \begin{matrix} x^2 + y^2 \leq 4 \\ x^2 + y^2 \geq 1 \end{matrix} \right\}.$$

КҮНЕГҮЛӘР

Түбәндәге функцияләрнең билгеләнү өлкәсен табыгыз:

517. $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

518. $z = \arcsin(x + y)$.

519. $z = 4 - x - 2y$.

520. $z = \dfrac{x^2 y}{2x + y}$.

521. $z = \dfrac{1}{x^2 - y^2}$.

522. $z = \dfrac{\ln|x^2 y|}{\sqrt{y - x}}$.

523. $z = \arccos(x^2 + y^2)$.

524. $z = \arcsin\dfrac{x}{3} + \arccos 2y$.

525. $z = \ln(y^2 - 4x + 8)$.

526. $z = \dfrac{1}{R^2 - x^2 - y^2}$.

527. $z = xy\sqrt{\ln\dfrac{R^2}{x^2 + y^2}} + \sqrt{x^2 + y^2 - R^2}$.

5. $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ y \to 0}} \dfrac{\sin xy}{y}$ чикләмәсен табарга.

Чишү. Бирелгән функция чик ноктада билгеләнми. Элек үткәннәргә таянып, үзгәртүләр кертәбез:

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}}\frac{\sin xy}{y}=\lim_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}} x\cdot\frac{\lim\sin xy}{x\cdot y}=3, \text{ чөнки } \lim_{y\to 0}\frac{\sin xy}{xy}=1.$$

6. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2x}{2x+y}$ чикләмәсен табарга.

Чишү. Бу мисалда $y=kx$ дип алабыз. Моннан

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2x}{2x+y}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{2x+kx}=\frac{2}{2+k}.$$

КҮНЕГҮЛӘР

Түбәндәге чикләмәләрне табыгыз:

528. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\frac{xy}{\sin(x\cdot y)}$.

529. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\frac{3x+2y}{x^2+y^2+2}$.

530. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{6x^3+9y^2}{x^2+y^2}$.

531. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$.

532. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$.

533. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$.

534. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+x^2y^2)^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$.

7. $z=x^2+5xy+\sin y$ функциясенең беренче тәртип аерым чыгарылмаларын табарга.

Чишү. Сорауга җавап бирү өчен, y даими дип исәпләп, функциянең x буенча чыгарылмасын табабыз:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x+5y.$$

Хәзер x даими дип, y буенча аерым чыгарылмасын табабыз:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=5x+\cos y.$$

8. $z = x^y$ функциясенең беренче тәртип аерым чыгарылмаларын табарга.

Чишү. y ны даими дип карасак, z дәрәҗәле функция була. Аның чыгарылмасы түбәндәгечә:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}.$$

x ны даими дип карасак, күрсәткечле функциянең чыгарылмасы түбәндәгечә:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x.$$

9. $z = \frac{x}{y} + \frac{y}{u} - \frac{u}{x}$ функциясенең беренче тәртип чыгарылмаларын табарга.

Чишү. Башта x ны, аннан соң y ны, аннан соң z ны даими дип санасак,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y} + \frac{u}{x^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{u}, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = -\frac{y}{u^2} - \frac{1}{x}.$$

10. $z = 4x^2 + y^2 - 5$ функциясенең (1; 1) ноктасындагы аерым чыгарылмаларын табарга.

Чишү. Алдагы мисалларны чишкәндәге күрсәтмәләрне кулланып табабыз:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 8x, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=1}} = 8.$$

Шуңа охшаш итеп, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=1}} = 2.$

11. $u = x \ln \frac{y}{x}$ функциясенең $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u$ тигезләмәсен канәгатьләндергәнен күрсәтергә.

Чишү. Тиешле рәвешүзгәртүләр башкарып, бирелгән функция $u = x(\ln y - \ln x)$ рәвешен ала. Аның x һәм y буенча чыгарылмасы:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \ln y - \ln x - 1 = \ln \frac{y}{x} - 1; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{y}.$$

Табылган аерым чыгарылмаларны бирелгән тигезләмәгә куйсак, $x(\ln\frac{y}{x}-1)+y\frac{x}{y}=x\ln\frac{y}{x}$ була. Шуны күрсәтергә кирәк иде дә.

12. $u=6x^2y^5$ **функциясенең тулы дифференциалын табарга.**

Чишү. Бирелгән функциянең аерым чыгарылмаларын табабыз:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=12xy^5,\ \ \frac{\partial u}{\partial y}=30x^2y^4.$$

Аерым чыгарылмаларны тиңдәшле рәвештә аргумент дифференциалына тапкырлагач, функциянең аерым дифференциалларын табабыз:

$$d_xu=12xy^5dx,\ d_yu=30x^2y^4dy.$$

Эзләнелә торган тулы дифференциал аерым дифференциаллар суммасына тигез була:

$$du=d_xu+d_yu=12xy^5dx+30x^2y^4dy.$$

13. Бирелгән ачык булмаган $z^4-4xyz=C$ функциясенең аерым чыгарылмаларын, беренче һәм икенче тәртип тулы дифференциалын табарга.

Чишү. Бирелгән мәсьәләне өч төрле юл белән чишәргә мөмкин.

а) Башта y даими дип санап, аны x буенча, аннан соң x даими дип санап, y буенча дифференциаллыйбыз:

$$4z^3\frac{\partial z}{\partial x}-4yz-4xy\frac{\partial z}{\partial x}=0, \qquad (1)$$

$$4z^3\frac{\partial z}{\partial y}-4xz-4xy\frac{\partial z}{\partial y}=0. \qquad (2)$$

(1) тигезлеген башта x буенча, аннан соң y буенча дифференциаллыйбыз:

$$4\cdot3z^2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+4z^3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-4y\frac{\partial z}{\partial x}-4xy\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-4y\frac{\partial z}{\partial x}=0, \qquad (3)$$

$$4\cdot3z^2\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+4z^3\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-4z-4y\frac{\partial z}{\partial y}-4x\frac{\partial z}{\partial x}-4xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0. \qquad (4)$$

(2) тигезлеген y буенча дифференциаллыйбыз:

$$4\cdot3z^2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+4z^3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-4x\frac{\partial z}{\partial y}-4x\frac{\partial z}{\partial y}-4xy\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0. \qquad (5)$$

(1) һәм (2) тигезлекләрен $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ ка карата чишәбез:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz}{z^3xy},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz}{z^3-xy}. \qquad (6)$$

(3), (4), (5) тигезләмәләреннән тиңдәшле рәвештә $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ны табабыз. Аларны тапканда, (6) тигезлекләрен исәпкә алып, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ лар урынына үз кыйммәтләрен куябыз:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2y\frac{\partial z}{\partial x}-3z^2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}{(z^3-xy)^3}=\frac{\frac{yz}{z^3-xy}\left(2y-3z^2\frac{yz}{z^3-xy}\right)}{z^3-xy}=$$

$$=-\frac{y^2z(2xy+z^3)}{(z^3-xy)^3}=\frac{y^2z(2xy+z^3)}{(xy-z^3)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{zx\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}-3z^2\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}}{z^3-xy}=\frac{z+\frac{2xyz}{z^3-xy}-3z^2\cdot\frac{xyz^2}{(z^3-xy)^2}}{z^3-xy}=$$

$$=\frac{z(z^6-x^2y^2-3xyz^3)}{(z^3-xy)^3}.$$

Безгә билгеле булганча, $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$. Моннан табабыз:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{3z^2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+2x\frac{\partial z}{\partial y}}{z^3-xy}=\frac{\frac{xz}{z^3-xy}\left(2x-\frac{3xz^3}{z^3-xy}\right)}{(z^3-xy)^3}=-\frac{x^2z(2xy+z^3)}{(z^3-xy)^3}=$$

$$=\frac{x^2z(2xy+z^3)}{(xy-z^3)^3},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz}{z^3-xy},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz}{z^3-xy},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{y^2z(2xy+z^3)}{(xy-z^3)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{z(z^6-x^2y^2-3xyz^3)}{(z^3-xy)^3},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^2z(2xy+z^3)}{(xy-z)^3},$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy,\ \ d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Биредә $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ нәрсәгә тигез булганын югарыда күрсәтеп үткән идек инде.

б) Бирелгән $z^4 - 4xyz = C$ тигезлегеп бер-бер артлы ике тапкыр дифференциаллыйбыз:

$$4z^3dz - 4xydz - 4xzdy - 4zydz = 0, \qquad (1)$$

$$4\cdot 3z^2dz^2 + 4z^3d^2z - 4xyd^2z - 4xdydz - 4ydxdz - \\ - 4xdydz - 4zdydx - 4zdxdy - 4ydxdz = 0. \qquad (2)$$

(1) тигезлегеннән

$$dz = \frac{zydx + xzdy}{z^3 - xy} = \frac{yz}{x^3 - xy}dx + \frac{xz}{z^3 - xy}dy. \qquad (3)$$

Әгәр табылган (3) формуласын $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ формуласы белән чагыштырсак, $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz}{z^3 - xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz}{z^3 - xy}$ булганлыгы килеп чыга.

d^2z ны (2) тигезлегеннән таба алабыз:

$$d^2z = \frac{2zdxdy + 2xdydz + 2ydxdz - 3z^2dz^2}{z^3 - xy}. \qquad (4)$$

$d^2z = (dz)^2$ булганлыгын истә тотып, (3) нәтиҗәсен (4) кә куябыз. Моннан

$$d^2z = 2zdxdy + (2xdy + 2ydx)\cdot\frac{yzdx + xzdy}{z^3 - xy} - 3z^2\left(\frac{yzdx + xzdy}{z^3 - xy}\right)^2 =$$

$$= \frac{y^2z(2xy + z^3)}{(xy - z^3)^3}dx^2 - \frac{2z(z^6 - x^2y^2 - 3xyz^3)}{(z^3 - xy)^2}dxdy + \frac{x^2z(2xy + z^3)}{(xy - z^3)^3}dy^2.$$

Килеп чыккан d^2z аңлатмасын

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + \frac{2\,\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

формуласы белән чагыштырып, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ны табабыз.

в) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$, $(F(x, y, z) = z^4 - 4xyz)$ формулалары буенча таба алабыз:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -4yz; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -4xz; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 4z^3 - 4xy\,.$$

Моннан

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz}{z^3 - xy}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz}{z^3 - xy}.$$

14. $u = \mathrm{tg}(yz) + x^z$ функциясенең $M_0(e;\ 0;\ 1)$ ноктасында озынлыгын (модулен) һәм градиент юнәлешен табарга.

Чишү. $grad\ u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\,.$

Градиент озынлыгы $|grad\ u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}\,,$

ә юнәлдерүче косинуслары түбәндәгечә:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{|gradu|}, \quad \cos\beta = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{|gradu|}, \quad \cos\gamma = \frac{\frac{\partial u}{\partial z}}{|gradu|}.$$

Шуннан бирелгән функциянең $M_0(e;\ 0;\ 1)$ ноктасындагы аерым чыгарылмаларын табабыз:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = \left. zx^{z-1}\right|_{M_0} = 1\cdot e^{1-1} = 1; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = \left.\frac{z}{\cos^2(yz)}\right|_{M_0} = \frac{z}{\cos^2 0} = 1;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = \left.\frac{y}{\cos^2(yz)}\right|_{M_0} + \left. x^z \ln x\right|_{M_0} = \frac{0}{\cos^2 0} + e\ln e = e.$$

Димәк, $\left. grad\,u\right|_{M_0} = \vec{i} + \vec{j} + e\vec{k}$. Шуңа күрә

$$|gradu|_{M_0} = \sqrt{1^2 + 1^2 + e^2} = \sqrt{2 + e^2}\,;$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2+e^2}}; \quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{2+e^2}}; \quad \cos\gamma = \frac{e}{\sqrt{2+e^2}}.$$

15. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ функциясенең $M_0(1;\ 1;\ 0)$ ноктасында иң тиз үсүче юнәлешен һәм $v(M_0)$ тизлеген табарга.

Чишү. Билгеле булганча, $u = f(x,\ y,\ z)$ функциясенең M_0 ноктасында иң тиз үсүче юнәлеш — ул градиент, ә градиент модуле тизлекнең зурлыгын күрсәтә.

Шулай булгач, мәсьәләне чишү өчен бирелгән функциянең $M_0(1;\ 1;\ 0)$ ноктасындагы аерым чыгарылмаларын һәм $|gradu|_{M_0}$ ны табарга кирәк.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = \left.\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right|_{M_0} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = \left.\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right|_{M_0} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = \left.\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right|_{M_0} = 0.$$

$$|grad\ u| = \left.\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}\right|_{M_0} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0} = 1.$$

Юнәлдерүче косинуслар градиенты түбәндәгечә:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \ \cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \ \cos\gamma = 0.$$

Димәк, $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$, $\upsilon(M_0) = 1$.

16. **Түбәндәге функцияләрнең экстремумнарын табарга:**

а) $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$;

б) $u = (x - y)^2 + (y - 1)^3$.

Чишү. а) Бирелгән функциянең критик нокталарын табыз: $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 6y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 24y^2 - 6x$. Димәк, z функциясе һәм аның аерым чыгарылмалары (R^2) та билгеләнгән:

$$\begin{cases} 3x^2 - 6y = 0, \\ 24y^2 - 6x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \ x_2 = 1 \\ y_1 = 0, \ y_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

яки $M_1(0;\ 0)$, $M_2(1; \frac{1}{2})$ функциянең критик нокталары була.

Әгәр $A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ дип тамгаласак, $\Delta = AC - B^2$ тамгасын ачыклыйбыз:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -6, \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 48y.$$

$M_1(0,\ 0)$ ноктасы өчен

$$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(0,0)} = 0, \ B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{(0,0)} = -6, \ C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(0,0)} = 0.$$

Моннан $\Delta(M_1) = AC - B^2 = -36 < 0$. Димәк, $M_1(0;\ 0)$ ноктасында экстремум юк. $M_2(1,\ \frac{1}{2})$ ноктасы өчен

$$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(1;\frac{1}{2})} = 6,\ B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{(1;\frac{1}{2})} = -6,\ C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(1;\frac{1}{2})} = 48 \cdot \frac{1}{2} = 24.$$

$\Delta(M_2) = 6 \cdot 24 - 36 > 0$. Димәк, $M_2(1;\ \frac{1}{2})$ ноктасында экстремум бар.

$A > 0$ булгач, ул экстремум ноктасы, атап әйткәндә, минимум ноктасы була:

$$z_{\min} = z\left(1, \frac{1}{2}\right) = 1^3 + 8\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + 5 = 4.$$

б) $u = (x - y)^2 + (y - 1)^3$ функциясенең критик нокталарын табабыз:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2(x - y);\ \ \frac{\partial u}{\partial y} = -2(x - y) + 3(y - 1)^2.$$

u функциясе һәм аның аерым чыгарылмалары яссылыкның (R^2) барлык нокталарында да билгеләнә:

$$\begin{cases} 2(x - y) = 0, \\ -2(x - y) + 3(y - 1)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases}$$

Шуңа күрә $M_0(1;\ 1)$ критик ноктасы була:

$$A = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{(1;1)} = 2;\ B = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right|_{(1;1)} = -2;$$

$$C = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{(1;1)} = 2 + 2 \cdot 3(y - 1)\Big|_{(1;1)} = 2.$$

Шулай булгач, $\Delta(M_0) = AC - B^2 = 2 \cdot 2 - (-2)^2 = 0$. Экстремумы барлыгын ачыклау өчен, өстәмә тикшеренүләр кирәк. Тикшеренүләр башкаргач, M_0 ноктасында функциянең экстремумы булмый дигән нәтиҗәгә киләбез.

17. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ өслегенә $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ ноктасында орынма яссылык үткәрергә.

Чишү. Башта аерым чыгарылмаларны эзлибез:

$$F'_x = \frac{2x}{a^2},\ F'_y = \frac{2y}{b^2},\ F'_z = \frac{2z}{c^2}.$$

Табылган аерым чыгарылмаларның M_0 ноктасындагы кыйммәтләрен табабыз:

$$F'_x(M_0)=\frac{2x_0}{a^2},\ F'_y(M_0)=\frac{2y_0}{b^2},\ F'_z(M_0)=\frac{2z_0}{c^2}.$$

Табылган кыйммәтләрне бирелгән өслеккә орынма яссылык формуласына куябыз:

$$\frac{2x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{2y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{2z_0}{c^2}(z-z_0)=0.$$

Ягъни $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}$.

Бирелгән M_0 ноктасы өслектә ятканга күрә, $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1$ була. Димәк, M_0 ноктасында орынма яссылык тигезләмәсе $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}=1$ була.

18. $2x^2y-z^3-7=0$ өслегенә $M_0(-2;\ 1;\ 1)$ ноктасында орынучы яссылык һәм нормаль үткәрергә.

Чишү. Бирелгән функцияне $F(x,y,z)=0$ дип тамгалыйбыз. Элек аерым чыгарылмаларны табабыз һәм $M_0(-2;\ 1;\ 1)$ ноктасындагы кыйммәтен исәплибез:

$$F_x'(M_0)=-8,\ F_y'(M_0)=8,\ F_z'(M_0)=-3.$$

Бу кыйммәтләрне бирелгән өслеккә орынучы яссылык формуласына куябыз. Моннан $8x-8y+3z+21=0$ була.

Нормаль тигезләмәсе болай: $\frac{x+2}{-8}=\frac{y-1}{8}=\frac{z-1}{-3}$.

КҮНЕГҮЛӘР

Функцияләрнең аерым чыгарылмаларын табыгыз:

535. $u=x^2+2y^2-3xy-$
$-4x+2y+3.$

536. $u=\frac{x^2}{y^2}-\frac{x}{y}$.

537. $z=e^{xy(x^2+y^2)}$.

538. $z=x^y+y^x$.

539. $z=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$.

540. $z=\arcsin\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$.

541. $z=\sin\frac{x}{y}\cdot\cos\frac{y}{x}$.

542. $u=\operatorname{arctg}\frac{y}{1+x^2}$.

543. $u=(x-y)(x-z)(y-z)$.

544. $u = (xy)^z$.

545. $u = \sin(x^2 + y^2 + z^2)$.

546. $u = x^{\frac{y}{z}}$.

Бирелгән ноктада функцияләрнең аерым чыгарылмаларын табыгыз:

547. $u = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$, $M_0(3; 4)$.

548. $u = \ln\left(x + \frac{y}{2x}\right)$, $M_0(1; 2)$.

549. $u = (2x)^{3y}$, $M_0\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

550. $u = \sin^2(3x + 2y - z)$, $u_x'(1; -1; 1)$.

551. $z = \sqrt[3]{x^2 + y^3}$, $M_0(1; 1)$.

552. $u = x^y \cdot y^x$ функциясе өчен $xu_x' + yu_y' = (x + y + \ln u)u$ булганлыгын исбатларга.

553. $z = \frac{x^2}{2y} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ функциясе өчен $x^2 z_x' + y^2 z_y' = \frac{x^3}{y}$ булганлыгын исбатларга.

554. $z = \ln(x^2 + xy + y^2)$ функциясе өчен $xz_x' + yz_y' = 2$ булганлыгын исбатларга.

555. $z = xy + xe^{\frac{y}{x}}$ функциясе өчен $xz_x' + yz_y' = xy + z$ булганлыгын исбатларга.

556. $u = x + \frac{x - y}{y - z}$ функциясе өчен $u_x' + u_y' + u_z' = 1$ булганлыгын исбатларга.

Түбәндәге функцияләрнең тулы дифференциалларын табыгыз:

557. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

558. $z = \operatorname{arctg}\frac{x + y}{x - y}$.

559. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

560. $z = 3x^2y^5$.

561. $u = 2x^{yz}$.

562. $u = \frac{xy}{z}$.

563. $z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

564. $u = \sin^2 x + \cos^2 y$.

565. $u = \ln(x^2 + y^2)$.

566. $u = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$.

567. $u = \cos(xy)$.

568. $u = \frac{x + y + xy}{x^2 + y^2}$.

Бирелгән функцияләрнең икенче тәртип тулы дифференциалларын табыгыз:

569. $z = 3x^2 + 5xy - 8y^3$.

570. $z = \arcsin xy$.

571. $z = \frac{x}{x+y}$.

572. $z = e^{x+y^2}$.

573. $u = \sin(x + y + z)$.

574. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

575. $u = xyz$.

576. $u = e^{xy}$.

577. $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy + 4xz + 2yz$, $d^2u(0; 0; 0) = ?$

578. $u = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$, $d^2u(1; 2) = ?$

Катлаулы функцияләрнең дифференциалларын табыгыз:

579. $z = e^{3x+2y}$, биредә $x = \cos t$, $y = t^2$; $\frac{dz}{dt} = ?$

580. $z = e^{xy}$, биредә $y = \varphi(x)$; $\frac{dz}{dx} = ?$

581. $z = u^2e^v$, биредә $u = \sin x$, $v = \cos x$; $\frac{dz}{dx} = ?$

582. $z = \ln(e^x + e^t)$, биредә $x = t^3$; $\frac{\partial z}{\partial t} = ?$ $\frac{dz}{dt} = ?$

583. $u = \arcsin\frac{x}{y}$, биредә $y = \sqrt{x^2+1}$; $\frac{du}{dx} = ?$

584. $u = e^{xy}\ln(x + y)$, биредә $x = 2t^2$, $y = 1 - 2t^2$; $\frac{du}{dt} = ?$

585. $u = \operatorname{arctg}\frac{x+1}{y}$, биредә $y = e^{(1+x)^2}$; $\frac{du}{dx} = ?$

586. $z = \operatorname{arcctg}(xy)$, биредә $y = e^x$; $\frac{dz}{dx} = ?$

587. $z = \frac{x}{y}$, биредә $x = e^t$, $y = \ln t$; $\frac{dz}{dt} = ?$

588. $u = \ln\sin\frac{x}{\sqrt{y}}$, биредә $x = 3t^2$, $y = \sqrt{t^2+1}$; $\frac{du}{dt} = ?$

589. $u = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$, биредә $x = R\cos t, y = R\sin t, z = H$; $\frac{du}{dt} = ?$

590. $z = u^v$, биредә $u = \sin x$, $v = \cos x$; $\frac{dz}{dx} = ?$

591. $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$, биредә $x=u\sin v,\ y=u\cos v$; $\dfrac{\partial z}{\partial u}=?\ \dfrac{\partial z}{\partial v}=?$

592. $x=u+v,\ y=u-v$ булганда, $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$ функциясе өчен $\dfrac{\partial z}{\partial u}+\dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{u-v}{v^2+u^2}$ тигезлегенең үтәлүен күрсәтергә.

593. $z=\varphi(x^2+y^2)$ функциясе өчен $y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ тигезлегенең үтәлүен күрсәтергә.

594. $z=y\cdot\varphi(x^2-y^2)$ функциясе өчен $\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z}{y^2}$ тигезлегенең үтәлүен күрсәтергә.

595. $z=\sin x+F(\sin y-\sin x)$ функциясе өчен $\dfrac{\partial z}{\partial y}\cos x+\dfrac{\partial z}{\partial x}\cos y=\cos x\cdot\cos y$ тигезлегенең үтәлүен күрсәтергә.

596. $z=\ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ функциясе $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ тигезләмәсенең чишелеше булуын күрсәтергә.

597. $z=\ln(e^x+e^y)$ функциясе $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2$ тигезләмәсенең чишелеше булуын күрсәтергә.

598. Бирелгән $x^2+2y^2+3z^2=6$ өслегенә $M(1;\ -1;\ 1)$ ноктасында орынма яссылык һәм нормаль үткәрергә.

599. Бирелгән $z=3x^2-y^4$ өслегенә $M(2;\ -1;\ 11)$ ноктасында нормаль үткәрергә.

600. $M(2;\ 4;\ 1)$ ноктасы бирелгән сферик $x^2+y^2+z^2=21$ өслегендә ята. Бу ноктада орынма яссылык һәм нормаль үткәрергә. Нормаль сфераның үзәге аркылы үтәме?

601. Бирелгән $x^2+4y^2+z^2=36$ өслегенә, $x+y-z=0$ яссылыгына параллель итеп, орынма яссылык үткәрергә.

602. Бирелгән $4x^2+4y^2+z^2=4$ эллипсоид өслегенә, $12x-3y+2z=0$ яссылыгына параллель итеп, орынма яссылык үткәрергә.

603. $x^2+y^2+z^2=x$ һәм $x^2+y^2+z^2=y$ өслекләренең үзара ортогональ булуын күрсәтергә.

604. $xy=z^2$ һәм $x^2+y^2+z^2=1$ өслекләренең үзара ортогональ булуын күрсәтергә.

IX бүлек

АНЫКСЫЗ ИНТЕГРАЛ

Практикада еш кына дифференциаллауга карата кире мәсьәләне — чыгарылмасы яки дифференциалы билгеле булган функциянең үзен табу мәсьәләсен чишәргә туры килә. Чыгарылмасы билгеле булса, функцияне табарга кирәк була. Мондый мәсьәләләр интеграл исәпләүләр бүлегендә өйрәнелә.

Билгеләмә 1. Әгәр X интервалында теләсә нинди x өчен $F'(x) = f(x)$ булса, $F(x)$ функциясе $f(x)$ функциясенең *башлангыч функциясе* дип атала.

Билгеләмә 2. $f(x)$ функциясе өчен башлангыч булган барлык функцияләр җыелмасы *аныксыз интеграл* дип атала һәм аны $\int f(x)dx = F(x) + C$ дип тамгалыйлар.

Биредә $f(x)$ функциясен — *интеграласты функциясе*, $f(x)dx$ тапкырчыгышын интеграл астындагы аңлатма, C ны *интегралларның даими зурлыгы* дип атыйлар.

Аныксыз интегралның түбәндәге үзлекләре бар:

1. $d\left(\int f(x)dx\right) = d\left[F(x) + C\right] = F'(x)dx = f(x)dx$;

2. $\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x) + C\right)' = F'(x) + C' = f(x)$;

3. $d\left[F(x)\right] = F'(x)dx = f(x)dx$. Ул вакытта $\int dF(x) = \int f(x)dx =$ $= F(x) + C$ була.

Аныксыз интегралның беренче үзлегеннән һәм чыгарылмалар таблицасыннан файдаланып, төп интеграллар таблицасын төзергә була. Моның өчен аны (чыгарылмалар таблицасын), интегралларның даими зурлыгын истә тотып, уңнан сулга күчереп язу җитә. Мәсәлән:

а) $x' = 1$, шуңа күрә $\int 1dx = x + C$;

б) $\left(\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = x^n$, шуңа күрә $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$;

в) $\left[\ln(x)\right]' = \dfrac{1}{x}$, шуңа күрә $\int \dfrac{1}{x}dx = \ln|x| + C$

(әгәр $x > 0$ булса, $|x| = x$ һәм $\left[\ln|x|\right]' = (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;

әгәр $x < 0$ булса, $|x| = -x$ һәм $\left[\ln|x|\right]' = \left[\ln(-x)\right]' = -1 \cdot \dfrac{1}{-x} = \dfrac{1}{x}$).

г) $(\sin x)' = \cos x$, шуңа күрә $\int \cos x dx = \sin x + C$;

д) $(\cos x)' = -\sin x$, шуңа күрә $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

Төп интеграллар таблицасы

1. $\int 0\, dx = C$;
2. $\int dx = x + C$;
3. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C;$ $n \neq -1$;
4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$;
5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$;
6. $\int e^x dx = e^x + C$;
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$;
8. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$;
9. $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right| + C = \ln|\operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x| + C$;
10. $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C$;
11. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C;$
12. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C;$
13. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$
14. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$
15. $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C,$ $a \neq 0;$
16. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C,$ $|x| > a;$
17. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C;$
18. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C;$
19. $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right|;$ $|x| < a.$

Интеграллауның иң гади кагыйдәләре

1. $\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx$;

2. $\int[f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm \ldots \pm$

$\pm \int f_n(x)\,dx$;

3. $\int f(x)dx = F(x) + C$, әгәр $u = \varphi(x)$ булса, $\int f(u)du = F(u) + C$.

Аныксыз интегралларның үзлекләренә һәм интеграллау кагыйдәләренә таянып, түбәндәге мисалларны карап үтик.

1. $\int x\sqrt{x}dx = \int x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$;

2. $\int\left(\sqrt[5]{x}\right)^{-9} dx = \int x^{-\frac{9}{5}}dx = -\frac{5}{4}x^{-\frac{4}{5}} + C$;

3. $\int\frac{x\sqrt{x} + x^2 - 5}{x^2\sqrt{x}}dx = \int\frac{dx}{x} + \int x^{-\frac{1}{2}}dx - 5\int x^{-\frac{5}{2}}dx =$

$= \ln|x| + 2\sqrt{x} + \frac{10}{3x\sqrt{x}} + C$;

4. $\int\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \sqrt{x}\right)^2 dx = \int\left(\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} + \frac{2\cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}} + x\right)dx =$

$= \int\left(x^{-\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{6}} + x\right)dx = \int x^{-\frac{2}{3}}dx + 2\int x^{\frac{1}{6}}dx + \int xdx =$

$= 3x^{\frac{1}{3}} + \frac{12x^{\frac{7}{6}}}{7} + \frac{x^2}{2} + C = 3\sqrt[3]{x} + \frac{12}{7}x\sqrt[6]{x} + \frac{x^2}{2} + C$;

5. $\int 3^x \cdot 5^x dx = \int 15^x dx = \frac{15^x}{\ln 15} + C$;

6. $\int\frac{2x+3}{x^2-7}dx = \int\frac{2x\,dx}{x^2-7} + 3\int\frac{dx}{x^2-7} = \int\frac{d(x^2-7)}{x^2-7} + \frac{3}{2\sqrt{7}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{7}}{x+\sqrt{7}}\right| =$

$= \ln\left|x^2 - 7\right| + \frac{3}{2\sqrt{7}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{7}}{x+\sqrt{7}}\right| + C$;

7. $\int\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}+\frac{2}{\sqrt{a}}\right)dx=\int\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}+\frac{2}{\sqrt{a}}\right)dx=\int x^{\frac{1}{6}}dx+\frac{2}{\sqrt{a}}\int dx=$

$=\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}+\frac{2}{\sqrt{a}}x+C$;

8. $\int\sqrt{x\sqrt{x}}dx=\int x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{4}}dx=\int x^{\frac{3}{4}}dx=\frac{4}{7}\ x\ \sqrt[4]{x^3}+C$;

9. $\int(x^2+1)^2dx=\int(x^4+2x^2+1)dx=\int x^4dx+2\int x^2dx+\int dx=$

$=\frac{x^5}{5}+\frac{2}{3}x^3+x+C;$

10. $\int(5e^x+7\cos x+1)dx=\int 5e^xdx+\int 7\cos x dx+\int dx=$

$=5e^x+7\sin x+x+C;$

11. $\int\frac{x^4}{x^2+9}dx.$

Чишү. Бу мисалда интеграл тамгасы астында төзек булмаган рациональ вакланма тора. Шуңа күрә мондый очракларда башта бөтен кисәген аерып чыгаралар һәм шуннан соң сумманы интеграллауга күчәләр. Бирелгән бөтен кисәкне аерып чыгару өчен, санаучыны ваклаучыга «почмаклап» бүлмичә, санаучының рәвешен үзгәртү дә җитә:

$$\int\frac{x^4}{x^2+9}dx=\int\frac{(x^4+81-81)}{x^2+9}dx=\int\left[x^2-9+\frac{81}{x^2+9}\right]dx=$$

$$=\int x^2dx-9\int dx+81\int\frac{dx}{x^2+9}=\frac{x^3}{3}-9x+27\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{3}+C.$$

I. Кисәкләп интеграллау ысулы

Кисәкләп интеграллау ысулы тапкырчыгышны дифференциаллау кагыйдәсенә нигезләнә: $d(uv)=udv+vdu$. Моннан $\int udv=uv-\int vdu$ формуласы табыла.

Кисәкләп интеграллау формуласыннан vdu интеграласты аңлатмасы udv интеграласты аңлатмасыннан гадирәк булган очракта файдаланалар.

12. $\int x\sin x dx = -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \sin x + C,$

$(u = x,\ dv = \sin x dx,\ du = dx,\ v = \int \sin x dx = -\cos x).$

Искәрмә. v ны тапканда, арадаш исәпләүләрне язуны гадиләштерү өчен, ирекле даими зурлыкны язмыйлар.

13. $\int \ln x dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{dx}{x} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C =$

$= x(\ln x - 1) + C,\ \ (u = \ln x,\ dv = dx,\ v = x,\ du = \frac{dx}{x}).$

14. $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C,$

$(x = u,\ e^x dx = dv,\ du = dx,\ v = \int e^x dx = e^x).$

15. $\int x^3\ln x dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \int \frac{x^4}{4}\cdot\frac{dx}{x} = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\int x^3 dx =$

$= \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{4} + C = \frac{x^4}{4}\left(\ln x - \frac{1}{4}\right) + C,$

$\left(u = \ln x,\ dv = x^3 dx,\ du = \frac{dx}{x},\ v = \frac{x^4}{4}\right).$

16. $\int \operatorname{arctg} x\, dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{xdx}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} =$

$= x\ \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln\ (1+x^2) + C,$

$(u = \operatorname{arctg} x,\ dv = dx,\ du = \frac{dx}{1+x^2},\ v = x).$

17. $\int x^2\sin x dx = -x^2\cos x - \int 2x\cos x dx,$

$(u = x^2,\ dv = \sin x dx,\ du = 2xdx,\ v = -\cos x).$

$\int 2x\cos x dx$ интегралына яңадан кисәкләп интеграллау формуласын кулланабыз. Ул вакытта

$\int 2x\cos x\, dx = 2x\sin x - \int \sin x\, dx = 2\left(x\sin x + \cos x - \frac{C}{2}\right),$

$(u = x,\ dv = \cos x\, dx,\ du = dx,\ v = \sin x).$

Димәк, $\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2\left(x \sin x + \cos x - \frac{C}{2}\right) =$

$$= -x^2 \cos x - 2x \sin x + 2 \cos x + C.$$

18. $\int x^2 e^{3x} dx = \frac{x^2}{3} e^{3x} - \frac{2}{3} \int x e^{3x} dx,$

$$\left(u = x^2,\ du = 2x\,dx,\ dv = e^{3x} dx,\ v = \frac{1}{3} \int e^{3x} d(3x) = \frac{1}{3} e^{3x}\right).$$

$\int x e^{3x} dx$ интегралына яңадан кисәкләп интеграллау формуласын кулланабыз. Ул вакытта

$$\int x e^{3x} dx = \frac{x}{3} e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} dx = \frac{x}{3} e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x},$$

$$\left(u = x,\ du = dx,\ dv = e^{3x} dx,\ v = \int e^{3x} dx = \frac{1}{3} e^{3x}\right).$$

Димәк, $\int x^2 e^{3x} dx = \frac{x^2}{3} e^{3x} - \frac{2}{3}\left(\frac{x}{3} e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x}\right) + C =$

$$= \frac{e^{3x}}{27} (9x^2 - 6x + 2) + C.$$

Күреп үткәнебезчә, әгәр x^2 урынында x^3 торган булса, без кисәкләп интеграллау формуласын өч тапкыр кулланган булыр идек. Гомумән, $\int x^n e^x dx$ һәм $\int x^n \sin x\, dx$, $\int x^n \cos x\, dx$ (n — уңай бөтен сан) рәвешендәге интегралларга кисәкләп интеграллау формуласын n тапкыр кулланырга кирәк булачак.

19. $\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx,$

$$(u = e^x,\ du = e^x dx,\ dv = \sin x dx,\ v = -\cos x).$$

Соңгы интегралны интеграллау өчен, яңадан кисәкләп интеграллау формуласын файдаланабыз:

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx,$$

$$(u = e^x,\ du = e^x dx,\ dv = \cos x dx,\ v = \sin x).$$

Бирелгән интеграл түбәндәге рәвешне ала:

$$\int e^x \sin x\, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx.$$

Соңгы интеграл бирелгән интеграл шикелле үк. Шуңа күрә $2\int e^x \sin x dx = e^x (\sin x - \cos x)$. Моннан $\int e^x \sin x\, dx = \frac{e^x}{2} \times$ $\times (\sin x - \cos x) + C.$

20. $\int (x+1)\sqrt{x^2+2x}\,dx = \frac{x^2+2x}{2}\sqrt{x^2+2x} -$

$-\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}\cdot\frac{x^2+2x}{2}dx = \frac{x(x+2)}{2}\sqrt{x^2+2x} -$

$-\frac{1}{2}\int (x+1)\sqrt{x^2+2x}\,dx,$

$\left(u=\sqrt{x^2+2x},\ du=\frac{1}{2}\frac{2(x+1)}{\sqrt{x^2+2x}}dx,\ dv=(x+1)dx,\right.$

$\left. v=\frac{x}{2}+x=\frac{x^2+2x}{2}\right).$

Соңгы интеграл бирелгән интеграл шикелле үк. Моннан чыгып табабыз: $\frac{3}{2}\int (x+1)\sqrt{x^2+2x}\,dx = \frac{x(x+2)}{2}\sqrt{x^2+2x}.$

Димәк, $\int (x+1)\sqrt{x^2+2x}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+2x)^3}+C.$

II. Үзгәрешлене алмаштырып кую методы

Төп интеграллар таблицасы чынбарлыкта чиксез күп формулаларны эченә ала. Бу беренче тәртип дифференциал формулаларының инвариантлы үзлегеннән килеп чыга. Әгәр $\int f(x)dx = F(x)+C$ булса һәм $x=\varphi(t)$ дип алсак, x ны $\varphi(t)$ белән алмаштырудан $\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt = F(\varphi(t))+C$ килеп чыга. x ны $\varphi(t)$ белән алмаштыруны *алмаштыру ысулы* дип атыйлар.

Еш кына $\varphi(t)$ ны x белән дә алмаштыралар. Моны интегралласты аңлатмасына ниндидер бер функциянең дифференциалы кергән очракларда эшлиләр. Үзгәрешлеләрне алмаштыру ысулы күп интегралларны таблица интегралларына кайтарып калдыру мөмкинлеген бирә.

21. $\int e^{\sin t}\cdot\cos t\,dt$ интегралын исәпләргә.

Чишү. Биредә $\cos t\,dt$ дифференциалы бар, димәк, $\sin t$ ны x белән алмаштырырга була. Ул вакытта

$$\int e^{\sin t}\cdot\cos t\,dt = \int e^x dx = e^x + C = e^{\sin t}+C.$$

22. $\int \frac{5x^4+15x^2}{x^5+5x^3+1}dx$.

Чишү. Бирелгән интегралны болай яза алабыз:

$$\int \frac{5x^4+15x^2}{x^5+5x^3+1}dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|x^5+5x^3+1\right| + C,$$

$$\left(x^5+5x^3+1 = t,\ d(x^5+5x^3+1) = dt,\ (5x^4+15x^2)\,dx = dt\right).$$

23. $\int \frac{x^2}{4x^3+1}dx.$

Чишү. Ваклаучының чыгарылмасын табабыз: $(4x^3 + 1)' = 12x^2$. Бу аңлатманы санаучысы белән чагыштырсак, 12 санының булмаганын күрербез. Әгәр санаучысын һәм ваклаучысын 12 гә тапкырлап, $\frac{1}{12}$ не интеграластыннан чыгарсак табабыз:

$$\int \frac{x^2}{4x^3+1}dx = \frac{1}{12}\int \frac{12x^2}{4x^3+1}dx = \frac{1}{12}\int \frac{d(4x^3+1)}{4x^3+1} = \frac{1}{12}\ln\left|4x^3+1\right| + C.$$

24. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$.

Чишү. Әгәр $x = \frac{1}{t}$ дип алсак, $dx = \frac{-dt}{t^2}$ була. Моннан

$$\int \frac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}dx = \int t^2 e^t\left(-\frac{dt}{t^2}\right) = -\int e^t dt = -e^t + C = -e^{\frac{1}{x}} + C.$$

25. $\int \sin(2x+3)dx.$

Чишү. Бирелгән $t = 2x+3$ дип алабыз. Ул вакытта $dt = d(2x+3) = 2dx$. Моннан $dx = \frac{dt}{2}$. Димәк,

$$\int \sin(2x+3)dx = \int \sin t\frac{dt}{2} = -\frac{1}{2}\cos t + C = -\frac{1}{2}\cos(2x+3) + C.$$

26. $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} t}}{1+t^2}dt.$

Чишү. Бирелгән $\frac{dt}{1+t^2}$ аңлатмасы $\operatorname{arctg} t$ ның дифференциалы булып тора. Шуңа күрә $\operatorname{arctg} t = x$ дип алып табабыз:

$$\int \frac{e^{\operatorname{arctg} t}}{1+t^2}dt = \int e^x dx = e^x + C = e^{\operatorname{arctg} t} + C.$$

27. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1+x}}$.

Чишү. Биредә $t = 1+\sqrt{1+x}$ дип алу да ярый. Ул вакытта $x = (t-1)^2 - 1$. Моннан $dx = 2(t-1)dt$. Димәк,

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{1+x}} = \int \frac{2(t-1)dt}{t} = 2\int dt - 2\int \frac{dt}{t} = 2t - 2\ln|t| + C =$$

$$= 2\left(1+\sqrt{1+x}\right) - 2\ln\left|1+\sqrt{1+x}\right| + C.$$

28. $\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}dx$.

Чишү. Бу очракта $t = \sqrt{2-x}$ дип алу җайлы була. Шулай булгач, $t^2 = 2 - x$. Моннан $dx = -2tdt$, $x^2 = (2-t^2)^2$. Шуңа күрә

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{2-x}} = \int \frac{(2-t^2)^2\cdot(-2t)\,dt}{t} = -2\int(4-4t^2+t^4)dt =$$

$$= -2\left(4t - \frac{4t^3}{3} + \frac{1}{5}t^5\right) + C = -\frac{2}{15}\cdot\sqrt{2-x}\,(32+8x+3x^2) + C.$$

29. $\int \frac{x^2}{x^6+9}dx$.

Чишү. Интегралласты аңлатмасының санаучысы x^3 дифференциалы булуы күренә. Дөрестән дә, $d(x^3) = 3x^2dx$. Шуңа күрә $x^3 = t$ дип алу уңай булачак. Соңгы тигезлекнең ике ягын да дифференциаллап, $3x^2dx = dt$ булуын табабыз. Моннан $x^2dx = \frac{1}{3}dt$. Димәк,

$$\int \frac{x^2dx}{x^6+9} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2+9} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3} + C = \frac{1}{9}\operatorname{arctg}\frac{x^3}{3} + C.$$

30. $\int \frac{(2\ln x+3)^3}{x}dx$.

Чишү. Бирелешеннән күренгәнчә, $(2\ln x + 3)$ нең чыгарылмасы $\frac{2}{x}$ була. Ә бирелешендә $\frac{dx}{x}$, ягъни бары 2 даими

коэффициентына гына аерыла. Шуңа күрә $2\ln x + 3 = t$ дип алу бирелгән интегралны гадиләштерә: $2\dfrac{dx}{x} = dt$, $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{1}{2}dt$. Ул вакытта

$$\int(2\ln x+3)^3\frac{dx}{x} = \int t^3\cdot\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int t^3dt =$$

$$= \frac{1}{8}t^4 + C = \frac{1}{8}(2\ln x+3)^4 + C.$$

31. $\int\cos^5 x\cdot\sqrt{\sin x}dx$.

Чишү. Биредә $\sqrt{\sin x} = t$ дип алмаштырабыз. Моннан $\sin x = t^2$, $\cos x dx = 2tdt$. Өстәвенә $\cos^4 x$ ны t аша күрсәтергә кирәк: $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^4 \Rightarrow \cos^4 x = (1 - t^4)^2$. Шулай булгач,

$$\int\cos^5 x\cdot\sqrt{\sin x}dx = 2\int(1-t^4)^2\cdot t^2dt = 2\int(t^2 - 2t^6 + t^{10})dt =$$

$$= \frac{2}{3}t^3 - \frac{4}{7}t^7 + \frac{2}{11}t^{11} + C = t^3\left(\frac{2}{3} - \frac{4}{7}t^4 + \frac{2}{11}t^8\right) + C =$$

$$= \sin x\sqrt{\sin x}\left(\frac{2}{3} - \frac{4}{7}\sin^2 x + \frac{2}{11}\sin^4 x\right) + C.$$

32. $\int\sqrt{a^2 - x^2}dx$.

Чишү. Мондый очракларда $x = a\sin t$ дип кую интеграллауны җиңеләйтә. Ул вакытта $t = \arcsin\dfrac{x}{a}$, $dx = a\cos tdt$. Шулай булгач,

$$\int\sqrt{a^2 - x^2}dx = \int\sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\cdot a\cos tdt = a^2\int\cos^2 tdt =$$

$$= a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C.$$

Тригонометрик рәвешүзгәртүләрдән соң табабыз:

$$\int\sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x^2}{2}\sqrt{a^2 - x^2}\right) + C.$$

Югарыда китерелгән мисаллардан x үзгәрешлесенә кайту кирәклеге ачык күренә.

III. Аныксыз коэффициентлар ысулы

Интеграласты аңлатмасы күпбуыннар һәм күрсәткечле функцияләр тапкырчыгышы, яисә күпбуыннар, күрсәткечле һәм тригонометрик функцияләр тапкырчыгышы рәвешендә бирелгән булса, аның башлангыч функциясе дә шуңа охшаш рәвештә була. Андый очракта эзләнелә торган башлангыч функцияне билгесез коэффициентлар ярдәмендә язалар. Мәсьәлә шушы билгесез коэффициентларны табуга кайтып кала. Моның өчен аныксыз интеграл үзлегеннән файдаланып, тигезлекнең ике кисәген дә дифференциаллап, сул һәм уң кисәкләрен чагыштыралар. Югарыда әйтелгәннәрне мисаллар ярдәмендә күрсәтәбез.

33. $\int(x^3+2x^2+5)e^x dx$.

Чишү. Мондый интегралны кисәкләп интегралларга мөмкин.

Ул вакытта $du = (3x^2 + 4x)dx$, $v = e^x$, $x^3 + 2x^2 + 5 = u$, $e^x dx = dv$. Шуңа күрә

$$\int(x^3+2x^2+5)e^x dx = (x^3+2x^2+5)e^x - \int(3x^2+4x)e^x dx.$$

Уң яктагы интегралга, шул ук алымны берничә тапкыр кулланып, җавап таба алабыз. Хисаплап тормыйча да, җавабы

$$\int(x^3+2x^2+5)e^x dx = (Ax^3+Bx^2+Cx+D)e^x + E \qquad (1)$$

булганлыгы күренеп тора. Биредә A, B, C, D — билгесез коэффициентлар, ә E — ирекле даими сан. Билгесез коэффициентларны табу өчен, (1) нең ике кисәген дә дифференциаллыйбыз:

$$(x^3+2x^2+5)e^x = (3Ax^2+2Bx+C)e^x + (Ax^3+Bx^2+Cx+D)e^x.$$

Соңгы тигезлекнең ике кисәген дә e^x сенә бүләбез. x ның бер үк дәрәҗә алдындагы коэффициентлары тигез булганда гына, күпбуыннар үзара тигез була:

$$x^3+2x^2+5 = Ax^3+(3A+B)x^2+(2B+C)x+(C+D),$$

$$\begin{array}{c|l} x^3 & A = 1, \\ x^2 & 3A + B = 2, \\ x & 2B + C = 0, \\ x^0 & C + D = 5. \end{array}$$

Моннан $A = 1,\ B = 2 - 3A = -1,\ C = -2B = 2,\ D = 5 - C = 3.$
Димәк, $\int(x^3 + 2x^2 + 5)e^x dx = (x^3 - x^2 + 2x + 3)e^x + E.$

34. $\int e^{3x} \sin 2x dx$.

Чишү. Биредә интеграласты аңлатмасы күрсәткечле һәм тригонометрик функцияләр тапкырчыгышы аша бирелгән. Әгәр кисәкләп интегралласак, башлангыч функция күрсәткечле функциянең сызыкча бер үк аргументлы тригонометрик функцияләр комбинациясенең тапкырчыгышын тәшкил иткәнлеген күрәбез:

$$\int e^{3x} \sin 2x dx = e^{3x}(A\cos 2x + B\sin 2x) + C,$$

биредә C — даими сан. A һәм B билгесез коэффициентларын табу өчен, тигезлекнең ике кисәген дә дифференциаллыйбыз:

$$e^{3x}\sin 2x = 3e^{3x}(A\cos 2x + B\sin 2x) + e^{3x}(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x).$$

Бу тигезлекнең ике кисәген дә e^{3x} нә бүләбез:

$$\sin 2x = 3A\cos 2x + 3B\sin 2x - 2A\sin 2x + 2B\cos 2x.$$

Шушы тигезлек cos$2x$ һәм sin$2x$ функцияләренең алдында торган коэффициентлар үзара тигез булган очракта гына дөрес була. Чагыштырабыз:

$$\begin{array}{r|l} \cos 2x & 3A + 2B = 0, \\ \sin 2x & -2A + 3B = 1. \end{array}$$

Бу системаны чишеп, кыйммәтләрен табабыз:
$B = \frac{3}{13},\ A = -\frac{2}{13}$. Димәк,

$$\int e^{3x}\sin 2x dx = e^{3x}\left(-\frac{2}{13}\cos 2x + \frac{3}{13}\sin 2x\right) + C =$$

$$= \frac{1}{13}e^{x}(3\sin 2x - 2\cos 2x) + C.$$

Нәтиҗәне тикшерү укучының үзенә тапшырыла:

1. Нәтиҗәдә уң якта килеп чыккан функцияне дифференциалларга.

2. Бирелгән интегралны кисәкләп интегралларга.

Әгәр интеграласты функциясе төрле дәрәҗәдәге күпбуыннарны тәшкил итсә, башлангыч функцияне билгесез коэффициентлар ярдәмендә иң зур дәрәҗәдән башлап кими баручы күпбуын рәвешендә язарга кирәк:

$$\int e^{ax}\left[P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx\right]dx =$$
$$= e^{ax}\left[R_n(x)\cos bx + S_n(x)\sin bx\right] + C, (m \le n);$$
$$R_n(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots + A_n.$$

Билгесез коэффициентлар методы, гадәттә, рациональ һәм иррациональ функцияләрне интеграллаганда кулланыла.

IV. Иң гади рациональ функцияләрне интеграллау

$R(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ рәвешендәге теләсә нинди рациональ функцияләрнең интегралын табу ысулы бар. ($P_m(x)$ һәм $Q_n(x)$ — дәрәҗәләре тиңдәшле рәвештә m һәм n булган күпбуыннар.) Биредә ике очрак булуы мөмкин:

1) $m < n$, ягъни рациональ функция төзек рациональ вакланма рәвешендә бирелгән була;

2) $m > n$, ягъни рациональ функция төзек булмаган рациональ вакланма рәвешендә бирелгән була.

Бу очракта $P_m(x)$ ны $Q_n(x)$ ка бүлеп, нәтиҗәне күпбуын белән төзек рациональ вакланма суммасы рәвешендә язалар.

Иң гади рациональ функцияләр дип

$$1)\frac{A}{x-a};\quad 2)\frac{A}{(x-a)^n};\quad 3)\frac{Ax+B}{x^2+px+q};\quad 4)\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$$

рәвешендәге функцияләр атала, биредә A, B, a, p, q — реаль саннар. Мондый рәвештәге вакланмаларның интегралларын исәпләү җиңел башкарыла.

$$1)\ \int\frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C;$$

$$2)\ \int\frac{A}{(x-a)^n}dx = A\int(x-a)^{-n}d(x-a) = A\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C.$$

Өченче һәм дүртенче очракта квадрат өчбуынның реаль тамырлары юк дип исәпләнә. Төрле рәвешүзгәртүләрдән соң

$$3)\ \int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+a\right| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$$

икәнлеге күренә;

4) $\int\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx$ интегралы өченче очрактагы шикелле үк интеграллана. Ләкин ул адымны бер тапкыр кулланып,

рекуррент формуласына кайтару юлы белән n күрсәткечен бер берәмлеккә киметәләр.

35. $\int \frac{3x+2}{x^2+2x+2} dx.$

Чишү. Бирелгән интегралны болай яза алабыз:

$$\int \frac{3x+2}{x^2+2x+3} dx = \int \frac{3x+2}{(x+1)^2+2} dx.$$

Бу очракта $x + 1 = t$ дип алабыз. Моннан $x = t - 1$, $dx = dt$, $3x + 2 = 3(t - 1) + 2 = 3t - 1$. Димәк,

$$\int \frac{3x+2}{(x+1)^2+2} dx = \int \frac{3t-1}{t^2+2} dt = \frac{3}{2} \int \frac{2t}{t^2+2} dt - \int \frac{dt}{t^2+2} =$$

$$= \frac{3}{2} \int \frac{d(t^2+2)}{t^2+2} - \int \frac{dt}{t^2+2} = \frac{3}{2} \ln(t^2+2) - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + C =$$

$$= \frac{3}{2} \ln(x^2+2x+3) - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

Шул ук мисалны төрле рәвешүзгәртүләр ярдәмендә чишәргә мөмкин. Моны укучының үзенә тәкъдим итәбез.

36. $\int \frac{x^4-7x+11}{x-2} dx$.

Чишү. $x^4 - 7x + 11$ күпбуынын $x - 2$ күпбуынына бүлеп (күпбуыннарны бүлү кагыйдәсе буенча) табабыз:

$$\frac{x^4-7x+11}{x-2} = x^3 + 2x^2 + 4x + 1 + \frac{13}{x-2}.$$

Моннан

$$\int \frac{x^4-7x+11}{x-2} dx = \int x^3 dx + 2\int x^2 dx + 4\int x dx + \int dx + 13\int \frac{dx}{x-2} =$$

$$= \frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + x + 13\ln|x-2| + C, \quad (x \neq 2).$$

37. $\int \frac{2x+1}{(x^2+4)^2} dx$.

Чишү. $\int \frac{2x+1}{(x^2+4)^2} dx = \int (x^2+4)^{-2} \cdot 2x dx + \int \frac{dx}{(x^2+4)^2} =$

$$= \int (x^2+4)^{-2} d(x^2+4) + \int \frac{dx}{(x^2+4)^2} = \frac{(x^2+4)^{-1}}{-1} + \frac{1}{4} \int \frac{(4+x^2)-x^2}{(x^2+4)^2} dx =$$

$$= -\frac{1}{x^2+4} + \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2+4} - \frac{1}{4}\int\frac{x^2dx}{(x^2+4)^2} = -\frac{1}{x^2+4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} -$$

$$-\frac{1}{4}\int\frac{x^2dx}{(x^2+4)^2}.$$

Уң яктагы интегралны кисәкләп интеграллыйбыз:

$$u = x,\ dv = \frac{x^2dx}{(x^2+4)^2},\ du = dx,\ v = -\frac{1}{2(x^2+4)}.$$

Шулай булгач,

$$\int\frac{x^2dx}{(x^2+4)^2} = -\frac{x}{2(x^2+4)} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+4} = -\frac{x}{2(x^2+4)} + \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C.$$

Нәтиҗәдә

$$\int\frac{2x+1}{(x^2+4)^2}dx = -\frac{1}{x^2+4} + \frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\left[-\frac{x}{2(x^2+4)} + \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C\right] =$$

$$= \frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} - \frac{1}{x^2+4} + \frac{x}{8(x^2+4)} + C.$$

38. $\int\frac{2x^3+3x}{x^4+x^2+1}dx$.

Чишү. Бирелгән интегралны алмаштырып кую ысулыннан файдаланып гадиләштерәбез:

$$x^2 = t,\ 2xdx = dt,\ xdx = \frac{1}{2}dt.$$

Моннан

$$\int\frac{2x^3+3x}{x^4+x^2+1}dx = \int\frac{(2x^2+3)x}{x^4+x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int\frac{(2t+3)}{t^2+t+1}dt = \frac{1}{2}\int\frac{(2t+1)+2}{t^2+t+1}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{2t+1}{t^2+t+1}dt + \int\frac{dt}{t^2+t+1} = \frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+t+1)}{t^2+t+1} + \int\frac{dt}{t^2+t+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|t^2+t+1\right| + \int\frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\ln\left|t^2+t+1\right| +$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C = \frac{1}{2}\ln\left(x^4+x^2+1\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^2+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C.$$

39. $\int \frac{x^5}{x^6 - x^3 - 2} dx$.

Чишү. Кайбер рәвешүзгәртүләрдән соң бирелгән интеграл таблица интегралына кайтып кала:

$$\int \frac{x^5}{x^6 - x^3 - 2} dx = \frac{1}{3} \int \frac{\left(x^3 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}}{\left(x^3 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}} d\left(x^3 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} \int \frac{\left(x^3 - \frac{1}{2}\right) d\left(x^3 - \frac{1}{2}\right)}{\left(x^3 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}} +$$

$$+ \frac{1}{6} \int \frac{d\left(x^3 - \frac{1}{2}\right)}{\left(x^3 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}} = \frac{1}{6} \ln\left|x^6 - x^3 - 2\right| + \frac{1}{18} \ln\left|\frac{x^3 - 2}{x^3 + 1}\right| + C.$$

V. Рациональ функцияләрне аныксыз коэффициентлар ысулы белән интеграллау

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ төзек рациональ функциясенең реаль тамырлары булмаганда, ә $Q(x) = (x-a)^{l_1}(x-b)^{l_2} \ldots (x^2 + px + q)^m$ рәвешендә күрсәтелгән очракта һәрбер алгебраик вакланманы түбәндәге гади рациональ вакланмалар суммасы рәвешендә язалар:

$$\frac{A_1}{(x-a)^{l_1}} + \frac{A_2}{(x-a)^{l_1 - 1}} + \ldots + \frac{A_{l_1}}{x-a} + \ldots +$$

$$+ \frac{M_1 x + N_1}{(x^2 + px + q)^m} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + px + q)^{m-1}} + \ldots + \frac{M_m x + N_m}{x^2 + px + q}$$

һәм, уртак ваклаучыга китереп, x ның тиңдәшле коэффициентларын тигезләп, билгесез A_1, A_2, ... M_1, N_1, ... M_m, N_m саннарын табалар.

40. $\int \frac{6x+1}{x^2 + 2x - 3} dx$.

Чишү. Югарыда әйтелгәннәргә таянып,

$$\frac{6x+1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{6x+1}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3}$$

дип язабыз.

Моннан $6x + 1 = A(x + 3) + B(x - 1)$. Ваклаучының реаль тамыры булганга күрә, A ны табу өчен, $x = 1$ дип кую җитә.

Шулай булгач, $4A = 7$, $A = \frac{7}{4}$.

B ны табу өчен, $x = -3$ куябыз. Моннан $-4B = -17$, $B = \frac{17}{4}$.

Димәк, интеграласты функциясе элементар вакланмалар суммасы рәвешендә болай языла:

$$\int \frac{6x+1}{x^2+2x-3}dx = \int \frac{7}{4(x-1)}dx + \int \frac{17}{4(x+3)}dx =$$

$$= \frac{7}{4}\ln|x-1| + \frac{17}{4}\ln|x+3| + C,$$

биредә $x \neq 1$ һәм -3.

41. $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx$.

Чишү. Элек рәвешүзгәртүләр ярдәмендә бөтен өлешне бүлеп алабыз:

$$\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} = \frac{(x^3-5x^2+6x)+5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x} = 1 + \frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x} =$$

$$= 1 + \frac{5x^2-6x+1}{x(x^2-5x+6)} = 1 + \frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)} = 1 + \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

Моннан

$5x^2 - 6x + 1 = A(x-2)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x-2)$.

Шулай булгач,

$5x^2 - 6x + 1 = (A+B+C)x^2 - (5A+3B+2C)x + 6A$,

$$\left.\begin{array}{l|l} x^2 & 5 = A+B+C, \\ x & -6 = -(5A+3B+2C), \\ x^0 & 1 = 6A, \end{array}\right\} \Rightarrow A = \frac{1}{6},\ B = -\frac{9}{2},\ C = \frac{28}{3}.$$

Табылган коэффициентларны урыннарына куйгач,

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx = \int dx + \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x} - \frac{9}{2}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{28}{3}\int \frac{dx}{x-3} =$$

$$= x + \frac{1}{6}\ln|x| - \frac{9}{2}\ln|x-2| + \frac{28}{3}\ln|x-3| + C \text{ килеп чыга,}$$

биредә $x \neq 0;\ 2;\ 3$.

42. $\int \frac{dx}{x^5 - x^2}$.

Чишү. Элек ваклаухманың ваклаучысын тапкырлашучыларга таркатабыз: $x^5 - x^2 = x^2(x^3 - 1) = x^2(x - 1)(x^2 + x + 1)$. Күренгәнчә, $(x^2 + x + 1)$ тапкырлашучысының реаль тамыры юк (гади уйланма тамыры гына бар). Ул вакытта

$$\frac{1}{x^5 - x^2} = \frac{1}{x^2(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1}.$$

Ваклаучыдан котылгач,

$$1 = A(x-1)(x^2+x+1) + Bx(x-1)(x^2+x+1) + Cx^2(x^2+x+1) +$$

$+(Dx+E)\cdot x^2(x-1)$ килеп чыга. x^4, x^3, x^2, x^1, x^0 алдындагы коэффициентларны чагыштырып табу өчен, тигезләмәләр системасын төзибез:

$$\begin{array}{c|l} x^4 & B + C + D = 0, \\ x^3 & A + C + E - D = 0, \\ x^2 & C - E = 0, \\ x^1 & C = \dfrac{1}{3}, \\ x^0 & A = -1. \end{array}$$

Моннан $A = -1$, $B = 0$, $C = \frac{1}{3}$, $D = -\frac{1}{3}$, $E = \frac{1}{3}$.

Димәк,

$$\frac{1}{x^5 - x^2} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{3(x-1)} - \frac{x-1}{3(x^2+x+1)}.$$

Интегралны табабыз:

$$\int \frac{1}{x^5 - x^2}dx = -\int \frac{dx}{x^2} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{x-1}{(x^2+x+1)}dx =$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\int \frac{2x+1-3}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\ln|x-1| -$$

$$-\frac{1}{6}\int \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\ln|x-1| -$$

$$-\frac{1}{6}\ln\left|x^2+x+1\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\frac{1}{x}+\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

43. $\int\frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$.

Чишү. Бирелгән интегралласты функциясе ваклаучысының бары реаль тамырлары гына бар, ә кайберләре кабатлы. Икенче төрле әйткәндә, ваклаучы тапкырлашучыларга таркала:

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+2)^2}+\frac{C}{x+2}+\frac{D}{(x+3)^3}+\frac{E}{(x+3)^2}+\frac{F}{x+3}.$$

Моннан

$$1=A(x+2)^2(x+3)^3+B(x+1)(x+3)^3+C(x+1)(x+3)^3(x+2)+$$
$$+D(x+1)(x+2)^2+E(x+1)(x+2)^2(x+3)+F(x+1)(x+2)^2(x+3)^2$$

бердәйлеге үтәлергә тиеш.

$x=1,\ -2,\ -3$ дип куйгач, тиңдәшле рәвештә $A=\frac{1}{8}$, $B=-1$, $D=-\frac{1}{2}$ булганлыгы килеп чыга. Ә инде хәзер x^5, x^4, x^3 алдындагы коэффициентларны тигезләп, түбәндәге тигезләмәләр системасын төзибез:

$$\begin{array}{c|l} x^5 & A+C+F=0, \\ x^4 & 13A+B+12C+E+11F=0, \\ x^3 & 67A+10B+56C+D+8E+47F=0. \end{array}$$

Шулай булгач, $F=-C-\frac{1}{8}$. F кыйммәтен икенче һәм өченче тигезләмәгә куйгач, $C+E=\frac{3}{4}$; $9C+8E=8$ була. Моннан $C=2$; $E=-\frac{5}{4}$; $F=-\frac{17}{8}$.

Димәк,

$$\int\frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}=\frac{1}{8}\ln|x+1|+\frac{1}{x+2}+2\ln|x+2|+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x+3)^2}+$$
$$+\frac{5}{4(x+3)}-\frac{17}{8}\ln|x+3|+C=\frac{9x^2+50x+68}{4(x+2)(x+3)^2}+\frac{1}{8}\ln\left|\frac{(x+1)(x+2)^{16}}{(x+3)^{17}}\right|+C,$$

биредә $x\neq-3;\ -2;\ -1$.

VI. Гади иррациональ һәм трансцендент функцияләрне интеграллау

Әгәр интеграласты аңлатмасы иррациональ функция булса, $t=\varphi(x)$ дип алмаштырып кую юлы белән интеграласты аңлатмасын, яңа t үзгәрешлесе аша рациональ аңлатмага кайтарып, безгә таныш булган ысул белән интеграллыйлар.

Кайбер иррациональ аңлатмаларны карап үтик:

1. $\int R\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ (n – натураль сан).

Бу очракта $\dfrac{ax+b}{cx+d}=t^n$ дип алмаштыралар.

2. $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx.$ Мондый мисалларда $\dfrac{2ax+b}{2}=t$ дип алмаштырып, түбәндәге төрләрнең берсенә китерәләр:

а) $\int R\left(t, \sqrt{k^2-t^2}\right)dt$; б) $\int R\left(t, \sqrt{k^2+t^2}\right)dt$; в) $\int R\left(t, \sqrt{t^2-k^2}\right)dt.$

а) Бу интегралда $t=k\cos u$ дип алып, $\int R(\cos u, \sin u)\,du$ рәвешенә китерәләр; б) интегралында $t=k\,\mathrm{tg}\,u$ һәм в) интегралында $t=\dfrac{k}{\cos u}$ дип алып, шул ук а) очрагындагы рәвешкә китерәләр. Андый мисалларны тригонометрик функцияләрне интеграллаганда карап үтәрбез.

3. $\int \dfrac{P_n(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, биредә $P_n(x)$ — n нчы дәрәҗәдәге күпбуын.

Мондый интеграллар билгесез коэффициентлар ысулы белән интеграллаңалар. Җавабын

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

рәвешендә язалар. Коэффициентларны һәм λ ны табу өчен, тигезлекнең ике кисәген дә дифференциаллап, чагыштыру ысулыннан файдаланалар.

44. $\int \dfrac{\sqrt[3]{2x-1}+1}{x}dx.$

Чишү. Әгәр $2x-1=t^3$ дип алсак, $x=\dfrac{t^3+1}{2}$, $dx=\dfrac{3}{2}t^2dt$ була.

Ул вакытта

$$\int\frac{\sqrt[3]{2x-1}+1}{x}dx=\int\frac{t+1}{\frac{t^3+1}{2}}\cdot\frac{3}{2}t^2dt=3\int\frac{t^2\,dt}{t^2-t+1}=3\int\frac{t^2-t+t+1-1}{t^2-t+1}dt=$$

$$=3\int\left(1+\frac{t-1}{t^2-t+1}\right)dt=3\int dt+\frac{3}{2}\int\frac{(2t-1)-1}{t^2-t+1}dt=3t+\frac{3}{2}\int\frac{d(t^2-t+1)}{t^2-t+1}-$$

$$-\frac{3}{2}\int\frac{dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=3t+\frac{3}{2}\ln\left|t^2-t+1\right|-\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C=$$

$$=3t+\frac{3}{2}\ln\left(t^2-t+1\right)-\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2t-1}{\sqrt{3}}+C,\quad \text{биредә } t=\sqrt[3]{2x-1}.$$

45. $\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,dx$.

Чишү. Бу мисалда $t^3=\frac{x+1}{x-1}$ дип куйгач,

$$x=\frac{t^3+1}{t^3-1},\ dx=-\frac{6t^2dt}{(t^3-1)^2}.$$

Интеграласты аңлатмасын

$$\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,dx=-6\int\frac{t^3}{(t^3-1)^2}dt \qquad (*)$$

дип яза алабыз. Интеграластында рациональ функция килеп чыкты. Кисәкләп интеграллау ысулын кулланып табабыз:

$$u=t,\ dv=\frac{t^2dt}{(t^3-1)^2},\ du=dt,\ v=-\frac{1}{3(t^3-1)},$$

$$\int\frac{t^3dt}{(t^3-1)^2}=-\frac{t}{3(t^3-1)}+\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t^3-1}. \qquad (**)$$

Сул ягындагы интегралны исәпләү өчен, аныксыз коэффициентлар ысулын файдаланабыз. Аның өчен интеграласты функциясен гади рациональ функцияләр суммасына таркатабыз:

$$\frac{1}{t^3-1}=\frac{A}{t-1}+\frac{Bt+C}{t^2+t+1}.$$

Ваклаучыларның бер тамыры реаль $t=1$. Шуның өчен эзләнелә торган A коэффициентын табу бик җиңел. $t=1$ дип

куйсак, $A=\frac{1}{3}$ була. Калган B һәм C коэффициентларын чагыштыру ысулыннан файдаланып табабыз:

$$\left.\begin{array}{l|l} t^2 & A+B=0 \\ t^0 & A-C=0 \end{array}\right\} \Rightarrow B=-\frac{1}{3},\ C=-\frac{2}{3}.$$

Хәзер инде A, B, C коэффициентлары билгеле булгач,

$$\int\frac{dt}{t^3-1}=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t-1}-\frac{1}{3\cdot 2}\int\frac{2t+4}{t^2+t+1}dt=\frac{1}{3}\ln|t-1|-\frac{1}{6}\int\frac{2t+1}{t^2+t+1}dt-$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}\ln|t-1|-\frac{1}{6}\ln\left|t^2+t+1\right|-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\operatorname{arctg}\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|t-1|-\frac{1}{6}\ln\left|t^2+t+1\right|-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}.$$

Табылган нәтиҗәне (**) тигезлегенә куябыз. Шулай булгач,

$$\int\frac{t^3dt}{(t^3-1)^2}=$$

$$=-\frac{t}{3(t^3-1)}+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\ln|t-1|-\frac{1}{6}\ln\left|t^2+t+1\right|-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right].$$

Димәк, табылган нәтиҗәне (*) тигезлегенә куеп табабыз:

$$\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx=-6\left[-\frac{t}{3(t^3-1)}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\ln|t-1|-\frac{1}{6}\ln(t^2+t+1)\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right]+C=\frac{2t}{t^3-1}-2\left[\frac{1}{3}\ln|t-1|-\frac{1}{6}\ln(t^2+t+1)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right]+C=\frac{2t}{t^3-1}-\frac{1}{3}\left[2\ln|t-1|-\ln(t^2+t+1)-\right.$$

$$\left.-\frac{6}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right]+C=\frac{2t}{t^3-1}-\frac{1}{3}\ln\frac{(t-1)^2}{t^2+t+1}+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C,$$

биредә $t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$.

46. $\int \frac{(5x-3)\,dx}{\sqrt{2x^2+8x+1}}$.

Чишү. Тиешле рәвешүзгәртүләр башкарып табабыз:

$$\int \frac{(5x-3)}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx = \int \frac{\frac{5}{4}(4x+8)-13}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx = \frac{5}{4}\int \frac{4x+8}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx -$$

$$-13\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+8x+1}} = \frac{5}{4}\int (2x^2+8x+1)^{-\frac{1}{2}}d(2x^2+8x+1) -$$

$$-\frac{13}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+\frac{1}{2}}} = \frac{5}{2}\sqrt{2x^2+8x+1} - \frac{13}{\sqrt{2}}\int \frac{d(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2+3{,}5}} =$$

$$= \frac{5}{2}\sqrt{2x^2+8x+1} - \frac{13}{\sqrt{2}}\ln\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2-3{,}5}\right| + C$$

килеп чыга.

47. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}}$, $0 < x < a$.

Чишү. Элек функцияне гадиләштерик. Аның өчен $\sqrt[4]{\frac{x}{a-x}} = t$, $\frac{x}{a-x} = t^4$, $x = \frac{at^4}{1+t^4}$, $dx = \frac{4at^3}{(1+t^4)^2}$ дип алабыз. Шулай булгач, $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}} = a\int \frac{4t^4dt}{(1+t^4)^2} = a\int t\,d\left(\frac{t^4}{1+t^4}\right)$. Соңгы интегралны кисәкләп интеграллыйк:

$$a\int t\,d\left(\frac{t^4}{1+t^4}\right) = a\frac{t^5}{1+t^4} - a\int \frac{t^4dt}{1+t^4} = \frac{at^5}{1+t^4} - a\int\left(\frac{t^4+1-1}{1+t^4}\right)dt =$$

$$= \frac{at^5}{1+t^4} - at + a\int \frac{dt}{1+t^4},$$

биредә $u = t$, $dv = d\left(\frac{t^4}{1+t^4}\right)$, $du = dt$, $v = \frac{t^4}{1+t^4}$.

Соңгы интегралның рәвешен үзгәртәбез:

$$\int \frac{dt}{1+t^4} = \frac{1}{2}\int \frac{(1+t^2)+(1-t^2)}{1+t^4}dt = \frac{1}{2}\int \frac{1+t^2}{1+t^4}dt - \frac{1}{2}\int \frac{t^2-1}{1+t^4}dt =$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1+\frac{1}{t^2}}{t^2+\frac{1}{t^2}}dt-\frac{1}{2}\int\frac{1-\frac{1}{t^2}}{t^2+\frac{1}{t^2}}dt=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(t-\frac{1}{t}\right)}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+2}+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(t+\frac{1}{t}\right)}{2-\left(t+\frac{1}{t}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t^2-1}{t\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1}.$$

Нәтиҗәдә

$$\int\frac{xdx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}}=\frac{at^5}{1+t^4}-at+\frac{a}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t^2-1}{t\sqrt{2}}=\frac{a}{4\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1}+C=$$

$$=-\frac{at}{1+t^4}+\frac{a}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t^2-1}{t\sqrt{2}}+\frac{a}{4\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1}+C,$$ биредә $t=\sqrt[4]{\frac{x}{a-x}}$.

48. $\int\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+x+1}}dx.$

Чишү. Нәтиҗәне

$$\int\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+x+1}}dx=(Ax+B)\sqrt{x^2+x+1}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

рәвешендә эзлибез. Ике ягын да дифференциаллап табабыз:

$$\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+x+1}}=A(\sqrt{x^2+x+1})+(Ax+B)\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Моннан $x^2+4=A(x^2+x+1)+(Ax+B)\left(x+\frac{1}{2}\right)+\lambda$ яки

$x^2+4=2Ax^2+x\left(\frac{3}{2}A+B\right)+\left(A+\frac{B}{2}\right)+\lambda$ дип алабыз.

x алдындагы коэффициентларны чагыштырып,

$$\begin{array}{l} x^2: \\ x^1: \\ x^0: \end{array}\begin{cases}1=2A,\\ 0=1,5A+B,\\ 4=A+0,5B+\lambda\end{cases}$$

системасына киләбез һәм A, B, λ ны табабыз:

$$A=\frac{1}{2},\ B=-\frac{3}{4},\ \lambda=\frac{31}{8}.$$

Моннан $\int\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+x+1}}dx=\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{4}\right)\sqrt{x^2+x+1}+3\frac{7}{8}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$

килеп чыга. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$ интегралын исәпләү өчен, $x+\frac{1}{2}=t$

дип алабыз ($dx=dt$). Ул вакытта

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}}=\ln\left|t+\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}\right|+C=\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|+C.$$

Нәтиҗәдә

$$\int\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+x+1}}dx=\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{4}\right)\sqrt{x^2+x+1}+3\frac{7}{8}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|+C$$

була.

49. $\int\frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx$.

Чишү. Нәтиҗәне

$$\int\frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx=(Ax^2+Bx+C)\sqrt{1+2x-x^2}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$$

рәвешендә эзлибез. Ике кисәген дә дифференциаллыйбыз:

$$\frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}=$$

$$=(2Ax+B)\sqrt{1+2x-x^2}+\frac{(Ax^2+Bx+C)2(1-x)}{2\sqrt{1+2x-x^2}}+\frac{\lambda}{\sqrt{1+2x-x^2}}.$$

Уртак ваклаучыга китереп табабыз:

$$x^3=(2Ax+B)\left(1+2x-x^2\right)+(Ax^2+Bx+C)(1-x)+\lambda.$$

Моннан, x алдындагы коэффициентларны чагыштырып, тигезләмәләр системасын төзибез:

$$\begin{array}{c|l} x^3 & 1=-3A, \\ x^2 & 0=5A-2B, \\ x^1 & 0=2A+3B-C, \\ x^0 & 0=B+C+\lambda. \end{array}$$

Моннан $A = -\frac{1}{3}$, $B = -\frac{5}{6}$, $C = -\frac{19}{3}$, $\lambda = 4$. Димәк,

$$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1+2x-x^2}} = -\frac{2x^2+5x+19}{6}\cdot\sqrt{1+2x-x^2} + 4\int\frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}.$$

Соңгы интегралны исәплибез:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}} = \int\frac{dx}{\sqrt{2-(x-1)^2}} = \int\frac{d(x-1)}{\sqrt{2-(x-1)^2}} = \arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}} + C.$$

Нәтиҗәдә

$$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1+2x-x^2}} = -\frac{2x^2+5x+19}{6}\cdot\sqrt{1+2x-x^2} + 4\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}} + C.$$

$\int\frac{P_n(x)\,dx}{(x-\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}$ интеграллары да югарыда карап үткән интеграллар рәвешенә китерелеп чишелә.

50. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+3}}$.

Чишү. Рәвешүзгәртүләр кертик:

$$x = \frac{1}{t},\ dx = -\frac{dt}{t^2},\ x^2+2x+3 = \frac{1}{t^2}+\frac{2}{t}+3 = \frac{1+2t+3t^2}{t^2}.$$

Моннан

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+3}} = \int\frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\cdot\frac{\sqrt{1+2t+3t^2}}{t}} = -\int\frac{dt}{\sqrt{1+2t+3t^2}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{2}{3}t+\frac{1}{3}}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dt}{\sqrt{\left(t+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{9}}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\left(t+\frac{1}{3}\right)+\sqrt{t^2+\frac{2}{3}t+\frac{1}{3}}\right| + C =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{3}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{2}{3x}+\frac{1}{3}}\right| + C.$$

VII. Кайбер тригонометрик функцияләрне интеграллау

1. $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ рәвешендәге интегралны $t = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$ дип алып, рациональ функциягә китереп була:

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$t = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$ тигезлегеннән $x = 2\mathrm{arctg}\; t;\;\; dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

Бу алмаштыруны *универсаль алмаштыру* дип атыйлар.

2. $\int \sin^m x\cdot\cos^n x dx$. Биредә m һәм n — натураль саннар.

а) $n = 2k + 1$, n так булганда, $\sin x = t$ дип алалар. Моннан $\cos x\, dx = dt$. Димәк,

$$\int \sin^m x\cdot\cos^{2k+1} x\,dx = \int \sin^m x\cdot\cos^{2k} x\cdot\cos x\,dx = \int t^m (1-t^2)^k dt.$$

б) $m = 2k + 1$, m так булганда, $\cos x = t$. Дәвам итүне укучыга тапшырабыз.

в) m һәм n икесе дә — җөп саннар, $m = 2k$, $n = 2l$. Андый очракларда почмакны икеләтү хисабына дәрәҗәләрне киметәләр:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}.$$

3. $\int \sin nx\cos mx dx$, $\int \cos nx\cos mx dx$, $\int \sin nx\sin mx dx$ рәвешендәге интегралларны исәпләү өчен, түбәндәге тригонометрик формулаларны кулланалар:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right],$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right],$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right].$$

4. $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ интегралының аерым очраклары:

1) $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x) \ \rightarrow \ \cos x = t;$

2) $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x) \ \rightarrow \ \sin x = t;$

3) $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x) \ \rightarrow \ \operatorname{tg} x = t$ яисә $\operatorname{ctg} x = t.$

51. $\int \frac{dx}{2\sin x + 3\cos x + 4}$.

Чишү. Универсаль алмаштырудан файдаланабыз. Димәк, $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2};\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. Ваклаучысын яңа үзгәрешле аша күрсәтәбез:

$$2\sin x + 3\cos x + 4 = 2\frac{2t}{1+t^2} + 3\frac{1-t^2}{1+t^2} + 4 = \frac{t^2+4t+7}{1+t^2}.$$

Моннан

$$\int \frac{dx}{2\sin x + 3\cos x + 4} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{t^2+4t+7}{1+t^2}}dt = 2\int \frac{dt}{t^2+4t+7} = 2\int \frac{dt}{(t+2)^2+3} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t+2}{\sqrt{3}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2}{\sqrt{3}} + C.$$

52. $\int \frac{dx}{(a^2+b^2)-(a^2-b^2)\cos x}$.

Чишү. Бу мисалда $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ дип алып табабыз:

$$\int \frac{dx}{(a^2+b^2)-(a^2-b^2)\cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{(a^2+b^2)-(a^2-b^2)\frac{1-t^2}{1+t^2}} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{(a^2+b^2)(1+t^2)-(a^2-b^2)(1-t^2)} = \int \frac{dt}{b^2+a^2t^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d(at)}{b^2+(at)^2} =$$

$$= \frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\frac{at}{b} + C = \frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C.$$

Универсаль алмаштыру t га карата рациональ функциягә кайтарып калдырса да, күп очракларда бик катлаулы

санауларга китерә. Андый очракларда башка ысулларны эзлиләр.

53. $\int\sqrt{1+\sin x}dx.$

Чишү. $\int\sqrt{1+\sin x}dx=\int\sqrt{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}dx=$

$$=\int\sqrt{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2}dx=\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)dx=\int\sin\frac{x}{2}dx+$$

$$+\int\cos\frac{x}{2}dx=-2\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}+C.$$

54. $\int\frac{2\sin x-\cos x}{3\sin^2 x+4\cos^2 x}dx.$

Чишү. $\int\frac{2\sin x-\cos x}{3\sin^2 x+4\cos^2 x}dx=2\int\frac{\sin xdx}{3(1-\cos^2 x)+4\cos^2 x}-$

$$-\int\frac{\cos x\,dx}{3\sin^2 x+4(1-\sin^2 x)}=-2\int\frac{d(\cos x)}{3+\cos^2 x}-\int\frac{d(\sin x)}{4-\sin^2 x}=$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\cos x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{4}\ln\frac{2-\sin x}{2+\sin x}+C.$$

55. $\int(3\sin x-2)^4\cos xdx.$

Чишү. $\int(3\sin x-2)^4\cos xdx=\frac{1}{3}\int(3\sin x-2)^4d(3\sin x-2)=$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}(3\sin x-2)^5+C=\frac{1}{15}(3\sin x-2)^5+C.$$

56. $\int\frac{\sin x}{\sqrt{2+\sin 2x}}dx.$

Чишү.

$$\int\frac{\sin x}{\sqrt{2+\sin 2x}}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{d(\sin x+\cos x)}{\sqrt{1+(\sin x+\cos x)^2}}+\frac{1}{2}\int\frac{d(\sin x-\cos x)}{\sqrt{3-(\sin x-\cos x)^2}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left|\sin x+\cos x+\sqrt{2+\sin 2x}\right|+\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{3}}+C.$$

57. $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x\, dx$.

Чишү. $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x\, dx = \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos x dx =$

$= \int \sin^2 x(1-\sin^2 x)\cos x dx = \int t^2 \cdot (1-t^2)dt = \int (t^2 - t^4)dt =$

$= \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5 + C = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C.$

58. $\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x\, dx$.

Чишү. $\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x\, dx = \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos^2 x\, dx =$

$= \frac{1}{4}\int \sin^2 2x \cdot \frac{(1+\cos 2x)}{2} dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\, dx + \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x dx =$

$= \frac{1}{8}\int \frac{1-\cos 4x}{2} dx + \frac{1}{8 \cdot 2}\int \sin^2 2x \cdot 2\cos 2x\, dx = \frac{1}{16}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x\right) +$

$+ \frac{1}{16} \cdot \frac{\sin^3 2x}{3} + C = \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$

59. $\int \sin 5x \cdot \cos 2x dx$.

Чишү. $\int \sin 5x \cdot \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\int [\sin 7x + \sin 3x]\, dx =$

$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{7}\cos 7x - \frac{1}{3}\cos 3x\right] + C = -\frac{1}{14}\cos 7x - \frac{1}{6}\cos 3x + C.$

60. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$.

Чишү. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx = \int \mathrm{tg}^2 x \frac{dx}{\cos^2 x} = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C =$

$= \frac{1}{3}\mathrm{tg}^3 x + C,$ биредә $\mathrm{tg}\, x = t,\ \frac{dx}{\cos^2 x} = dt.$

61. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx$.

Чишү. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{(1-\sin^2 x)\cos x}{\sin^2 x} dx =$

$= \int \frac{d \sin x}{\sin^2 x} - \sin x = -\frac{1}{\sin x} - \sin x + C.$

62. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x \sqrt[3]{\cos x}} dx.$

Чишү.

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos x \sqrt[3]{\cos x}} dx = \int \sin^3 x \cos^{-\frac{4}{3}} x\, dx = \int (1-\cos^2 x)\cdot \sin x \cos^{-\frac{4}{3}} x\, dx.$$

$\cos x = t$ дип алабыз. Моннан $-\sin x\, dx = dt$. Ул вакытта

$$\int (1-\cos^2 x)\cdot \sin x \cos^{-\frac{4}{3}} x\, dx = -\int (1-t^2) t^{-\frac{4}{3}} dt = -\int t^{-\frac{4}{3}} dt + \int t^{\frac{2}{3}} dt =$$

$$= 3t^{-\frac{1}{3}} + \frac{3}{5} t^{\frac{5}{3}} + C = \frac{3}{\sqrt[3]{\cos x}} + \frac{3}{5} \cos x \sqrt[3]{\cos^2 x} + C.$$

Нәтиҗәдә $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x \sqrt[3]{\cos x}} dx = \frac{3}{\sqrt[3]{\cos x}} + \frac{3}{5} \cos x \sqrt[3]{\cos^2 x} + C.$

КҮНЕГҮЛӘР

Интегралларны исәпләгез:

605. $\int (2x^3 - 5x^2 + 7x - 3) dx.$

606. $\int x(x+a)(x+b) dx.$

607. $\int \left(a + bx^3\right)^2 dx.$

608. $\int \frac{x^4 dx}{x^2+4}.$

609. $\int \frac{dx}{2x^2-6}.$

610. $\int \frac{(1-z)^2}{z\sqrt{z}} dz.$

611. $\int \frac{\sqrt[3]{z^2} - \sqrt[4]{z}}{\sqrt{z}} dz.$

612. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}.$

613. $\int \frac{dt}{\sqrt{3-4t^2}}.$

614. $\int x\sqrt{1-x^2} dx.$

615. $\int 5^x e^x dx.$

616. $\int e^{3z} 3^z dz.$

617. $\int \frac{3\cdot 2^z - 2\cdot 3^z}{2^z} dz.$

618. $\int \frac{x\, dx}{x^4 - 2x^2 - 1}.$

619. $\int \frac{(1+2z^2) dz}{z^2(1+z^2)}.$

620. $\int \frac{dz}{\sin^2 z + \cos 2z}.$

621. $\int e^{3\cos t} \sin t\, dt.$

622. $\int \frac{dt}{t \ln t}.$

623. $\int \frac{\sqrt{t} + \ln t}{t} dt.$

624. $\int \sqrt{\sin t} \cos t\, dt.$

625. $\int x^4 \ln x\, dx.$

626. $\int \ln x\, dx.$

627. $\int \ln\left(z^2+1\right) dz.$

628. $\int \frac{\arcsin z}{\sqrt{z+1}} dz.$

629. $\int \arccos z\, dz.$

630. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{z}\, dz.$

631. $\int t^2 e^t dt.$

632. $\int x^2 \cos 3x\, dx.$

633. $\int \cos \ln t\, dt.$

634. $\int \sqrt{a^2-z^2}\, dz\ \ (a>0).$

635. $\int \sin \ln z\, dz.$

636. $\int t \sin t \cos t\, dt.$

637. $\int \frac{t\, dt}{\sin^2 t}.$

638. $\int \frac{t \cos t}{\sin^2 t} dt.$

639. $\int t^2 e^t \sin t\, dt.$

640. $\int \frac{x+3}{2+\sqrt{1+x}} dx.$

641. $\int x \sqrt[3]{2-x}\, dx.$

642. $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx.$

643. $\int \frac{dz}{\sqrt{5z-2}}.$

644. $\int \frac{dt}{1+\sqrt[3]{t+1}}.$

645. $\int \frac{dt}{\sqrt{1+e^t}}.$

646. $\int \frac{t\, dt}{\sqrt{t^4+1}}.$

647. $\int \frac{\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}} dt.$

648. $\int \frac{dt}{\sqrt{t}+\sqrt[4]{t}}.$

649. $\int \frac{e^{2z}}{e^{4z}-5} dz.$

650. $\int \frac{e^{2z}}{e^{4z}+5} dz.$

651. $\int \frac{\sqrt{e^t}\, dt}{\sqrt{16-e^t}}.$

652. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}} dx.$

653. $\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}.$

654. $\int \frac{e^{2z} dz}{\sqrt[4]{1+e^z}}.$

655. $\int \frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x} dx.$

656. $\int \frac{dz}{(z+a)(z+b)}.$

657. $\int \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)} dx.$

658. $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6} dx.$

659. $\int \frac{3x^4+2}{x^3-3x^2+2x} dx.$

660. $\int \frac{z^4}{z^4+5z^2+4} dz.$

661. $\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)} dx.$

662. $\int \frac{z^3-1}{4z^3-z} dz.$

663. $\int \frac{dz}{z^4-1}$.

664. $\int \frac{dz}{z^4+1}$.

665. $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$.

666. $\int \frac{x^3-2x}{(x^2+1)^2}\,dx$.

667. $\int \frac{3t+5}{(t^2+2t+2)^2}\,dt$.

668. $\int \frac{t^3+t^2}{t^2-6t+5}\,dt$.

669. $\int \frac{t^4}{t^4-16}\,dt$.

670. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}\,dx$.

671. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+2}\,dx$.

672. $\int \frac{1+\sqrt[4]{t}}{t+\sqrt{t}}\,dt$.

673. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+3}}$.

674. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x^2}}$.

675. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\,dx$.

676. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$.

677. $\int \frac{dz}{z\sqrt{1-z^2}}$.

678. $\int \frac{dz}{\sqrt{z}+\sqrt[3]{z}}$.

679. $\int \frac{x+3}{x^2\sqrt{2x+3}}\,dx$.

680. $\int \frac{3z+2}{(z+1)\sqrt{z^2+3z+3}}\,dz$.

681. $\int \frac{\sqrt[6]{z}}{1+\sqrt[3]{z}}\,dz$.

682. $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+2x}}$.

683. $\int \frac{x^3\,dx}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}$.

684. $\int z^4\sqrt{z^2+4}\,dz$.

685. $\int z^2\sqrt{a^2-z^2}\,dz$.

686. $\int \frac{dz}{(z+1)^5\sqrt{z^2+2z}}$.

687. $\int \frac{dz}{(z+1)^3\sqrt{z^2+2z}}$.

688. $\int \frac{dz}{z^5\sqrt{z^2-1}}$.

689. $\int \frac{dt}{5+4\cos at}$.

690. $\int \frac{\cos t}{1+\cos t}\,dt$.

691. $\int \frac{dt}{4\cos t+3\sin t}$.

692. $\int \frac{\sin t+\sin^3 t}{\cos 2t}\,dt$.

693. $\int \frac{\cos^3 t}{\sin^4 t}\,dt$.

694. $\int \frac{\sin 2t}{\cos^3 t}\,dt$.

695. $\int \frac{1+\mathrm{tg}\,t}{\sin 2t}\,dt$.

696. $\int \sin^2 t\cos^3 t\,dt$.

697. $\int \sin^2 t\cos^2 t\,dt$.

698. $\int \sin^4 t\, dt.$

699. $\int \cos^6 t\, dt.$

700. $\int \sin^4 t \cos^5 t\, dt.$

701. $\int \frac{\cos^2 t}{\sin^4 t} dt.$

702. $\int \frac{dt}{\sin^2 t \cos^4 t}.$

703. $\int \mathrm{tg}^5 x dx.$

704. $\int \frac{dx}{\mathrm{tg} x \cos 2x}.$

705. $\int \frac{dx}{\sin 2x - 2\sin x}.$

706. $\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}.$

707. $\int \sin 3x \cos x\, dx.$

708. $\int \cos 3x \cos 2x\, dx.$

709. $\int \sin(2 + 3x)\sin(2x - 2)\, dx.$

710. $\int \cos(3x - 4)\sin(4 - 5x)\, dx.$

711. $\int \sin^5 x \sqrt{\cos x}\, dx.$

712. $\int \cos^3 x \sqrt{\sin x}\, dx.$

X бүлек

АНЫК ИНТЕГРАЛ

$[a; b]$ кисемтәсенең һәр ноктасында өзлексез булган $y = f(x)$ функциясе бирелгән булсын. Шушы кисемтәне $x_0, x_1, \ldots, x_n$ нокталары ярдәмендә, $a = x_0 \le x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n = b$ булырлык итеп, n кисәккә бүлик, $[x_k; x_{k+1}]$ кисемтәсенең озынлыгын $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ аша тамгалыйк (монда $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$). $y = f(x)$ функциясе кечкенә кисемтәләрнең һәрберсендә дә өзлексез булганлыктан, аларның һәркайсында ул үзенең иң кечкенә m_k һәм иң зур M_k кыйммәтләрен ала. $[a; b]$ кисемтәсен төрлечә бүлеп, һәр очрак өчен ике сумма $\sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k$ һәм $\sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k$ табабыз. Бу суммаларны Дарбуның *түбәнге* һәм *югарыгы суммалары* дип атыйлар. Гомумән алганда, $[a; b]$ кисемтәсен төрлечә бүлгәндә, Дарбуның түбәнге һәм югарыгы суммаларының кыйммәтләре төрлечә була. Шуңа күрә ике $A = \left\{\sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k\right\}$ һәм $B = \left\{\sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k\right\}$ санлы күплекләрен аерып торучы санны $y = f(x)$ функциясенең $[a; b]$ кисемтәдәге *анык интегралы* дип атыйлар һәм аны $\int_a^b f(x)\,dx$ символы белән тамгалыйлар, ягъни

$$\sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k \le \int_a^b f(x)\,dx \le \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k .$$

Анык интегралның үзлекләре

1. $\int_a^b Cf(x)\,dx = C\int_a^b f(x)\,dx.$

2. $\int_a^b \left(f(x) \pm \varphi(x)\right) dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b \varphi(x)\,dx.$

3. Әгәр $[a;\, b]$ кисемтәдә $f(x) \le g(x)$ булса,

$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$

4. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$

5. $\int_a^a f(x)\,dx = 0.$

6. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$

7. Әгәр $m \le f(x) \le M$ булса, $m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a).$

8. $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$

9.1. Анык интегралны исәпләү кагыйдәләре

1) Әгәр $f(x)$ функциясе $[a;\, b]$ кисемтәдә өзлексез, ә $F(x)$ функциясе шул кисемтәдә $f(x)$ өчен башлангыч функция булса,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

формуласы дөрес була.

2) Әгәр $u = u(x)$, $v = v(x)$ $[a;\, b]$ кисемтәдә өзлексез һәм дифференциалланучы булса, $\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$ була.

3) $x = \varphi(t)$ функциясе $\alpha \le t \le \beta$, $(a = \varphi(\alpha),\ b = \varphi(\beta))$ кисемтәсендә үзенең чыгарылмасы $\varphi'(t)$ белән өзлексез булса, $f[\varphi(t)]$ функциясе $[a;\, b]$ кисемтәдә өзлексез була һәм

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(x)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

4) Әгәр $f(x)$ так функция, ягъни $f(-x) = -f(x)$ булса, ул вакытта $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$ була.

Әгәр $f(x)$ җөп функция, ягъни $f(-x) = f(x)$ булса, ул вакытта $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx$ була.

Кайбер мисалларның чишелеше

1. $\int\limits_{2}^{3} x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_2^3 = \frac{1}{4}(3^4 - 2^4) = \frac{1}{4}(81-16) = \frac{65}{4}$.

2. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$

3. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}0 = \frac{\pi}{4}$.

4. $\int\limits_{0}^{2\pi} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^{2\pi} = -\cos 2\pi + \cos 0 = 0.$

5. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} - (-\cos 0) = 1.$

6. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{(x^2+1)-1}{1+x^2}dx = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} dx -$

$-\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+x^2}dx = x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \operatorname{arctg}x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{\pi}{4} - 0\right) - \left(\operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{4}\right) -\right.$

$\left.- \operatorname{arctg}0\right) = \frac{\pi}{4} - 1.$

7. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$.

8. $\int\limits_{1}^{2} xe^x dx.$

Бу очракта кисәкләп интеграллыйбыз. Шуңа күрә $u = x$, $du = dx$, $dv = e^x dx$, $v = e^x$.

Ул вакытта

$$\int_1^2 xe^x dx = xe^x \Big|_1^2 - \int_1^2 e^x dx = 2e^2 - e - e^x \Big|_1^2 = 2e^2 - e - (e^2 - e) = e^2.$$

9. $\int_1^e \ln x\, dx.$

Чишү. Кисәкләп интеграллауны файдаланып табабыз: $u = \ln x,\ du = \frac{1}{x}dx,\ dv = dx,\ v = x$. Шулай булгач, $\int_1^e \ln x\, dx =$ $= x\ln x \Big|_1^e - \int_1^e x\, d(\ln x) = e - \int_1^e x\frac{1}{x}dx = e - \int_1^e dx = e - x\Big|_1^e = e - e + 1 = 1.$

10. $\int_0^\pi x\cos x\, dx.$

Чишү. Бу мисалда да кисәкләп интеграллауны кулланабыз: $u = x,\ du = dx,\ dv = \cos dx,\ v = \sin x$. Моннан

$$\int_0^\pi x\cos x\, dx = x\sin x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x\, dx = 0 + \cos x \Big|_0^\pi = 0 - 1 - 1 = -2$$

килеп чыга.

11. $\int_0^{\frac{\pi}{2a}} (x+3)\sin ax\, dx.$

Чишү. Кисәкләп интеграллау формуласыннан файдаланабыз: $u = x + 3,\ du = dx,\ dv = \sin ax\, dx,\ v = \frac{1}{a}\int \sin ax\, d(ax) =$ $= -\frac{1}{a}\cos ax$. Шуңа күрә

$$\int_0^{\frac{\pi}{2a}} (x+3)\sin ax\, dx = \frac{x+3}{a}\cos ax \Big|_0^{\frac{\pi}{2a}} + \int_0^{\frac{\pi}{2a}} \frac{1}{a}\cos ax\, dx =$$

$$= \frac{x+3}{a}\cos ax \Big|_0^{\frac{\pi}{2a}} + \frac{1}{a^2}\sin ax \Big|_0^{\frac{\pi}{2a}} = \frac{1+3a}{a^2}$$

була.

12. $\int_3^6 \frac{z^2+1}{\sqrt{z-2}}dz.$

Чишү. Алмаштырып кую ысулы белән интеграллыйбыз: $t = \sqrt{z-2}$; $t^2 = z - 2$; $z = t^2 + 2$; $dz = 2tdt$. Яңа үзгәрешле өчен интеграллау чикләрен табабыз: $z = 3$ булганда, $t = 1$; $z = 6$ булганда, $t = 2$ була. Шулай булгач, $\int_3^6 \frac{z^2+1}{\sqrt{z-2}}dz = \int_1^2 \frac{(t^2+2)^2+1}{t}2tdt =$

$$= 2\int_1^2 (t^4 + 4t^2 + 5)dt = 2\left(\frac{t^5}{5} + \frac{4t^3}{3} + 5t\right)\Big|_1^2 = 41\frac{1}{15}.$$

13. $\int_e^{e^2} \frac{(2\ln z - 3)^2}{z\ln z} dz.$

Чишү. Бу очракта алмаштырып кую ысулы белән интеграллыйбыз:

$$t = \ln z; \quad z = e^t; \; dz = e^t dt.$$

Хәзер t өчен яңа интеграллау чикләрен табабыз: $z = e$ булганда, $t = 1$; $z = e^2$ булганда, $t = 2$. Димәк, $\int_e^{e^2} \frac{(2\ln z - 3)^2}{z\ln z} dz =$

$$= \int_1^2 \frac{(2t-3)^2 e^t}{e^t} dt = \int_1^2 \frac{4t^2 - 12t + 9}{t} dt = (2t^2 - 12t + 9\ln t)\Big|_1^2 = 9\ln 2 - 6.$$

14. $\int_1^{64} \frac{dz}{\sqrt{z} + \sqrt[3]{z}}.$

Чишү. $\sqrt[6]{z} = t$ дип алмаштырсак, ул вакытта $z = t^6$, $dz = 6t^5 dt$. Яңа интеграллау чикләрен табабыз: $z = 1$ булганда, $t = 1$; $z = 64$ булганда, $t = 2$. Моннан

$$\int_1^{64} \frac{dz}{\sqrt{z} + \sqrt[3]{z}} = \int_1^2 \frac{6t^5 dt}{t^3 + t^2} = 6\int_1^2 \frac{t^3 dt}{t+1} = 6\int_1^2 \frac{(t^3+1) - 1}{t+1} dt =$$

$$= 6\left[\int_1^2 \frac{t^3+1}{t+1} dt - \int_1^2 \frac{dt}{t+1}\right] = 6\left[\int_1^2 (t^2 - t + 1)\, dt - \int_1^2 \frac{d(t+1)}{t+1}\right] =$$

$$= 6\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln(t+1)\Big|_1^2\right] = 11 - 6\ln 1{,}5, \;\; (t \neq -1).$$

15. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx.$

Чишү. Интегралясты функциясен үзгәртәбез:

$$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} = \frac{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+x^2}}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+x^2}{x^2\sqrt{1+x^2}}.$$

Шуңа күрә $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1+x^2}{x^2\sqrt{1+x^2}}dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} + \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ була.

Моннан

$$J_1 = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}},\ J_2 = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|\Big|_1^{\sqrt{3}} = \ln\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$$

дип алабыз. Хәзер бу интегралны исәпләү өчен, яңа үзгәрешле кертәбез:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = t,\ x = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}},\ dx = \frac{dt}{(1-t^2)\sqrt{1-t^2}}.$$

Яңа интеграллау чикләрен табабыз:

x	1	$\sqrt{3}$
t	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Моннан

$$J_1 = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t}\Big|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Нәтиҗәдә

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx = \sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} + \ln\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}.$$

16. $\int_1^2 \frac{\sqrt{2+z^2}}{1+z^2}dz.$

Чишү. Интеграласты функциясен түбәндәгечә язабыз:

$$\frac{\sqrt{2+z^2}}{1+z^2} = \frac{2+z^2}{(1+z^2)\sqrt{2+z^2}} = \frac{1}{\sqrt{2+z^2}} + \frac{1}{(z^2+1)\sqrt{2+z^2}}.$$

Моннан

$$J_1 = \int_1^2 \frac{dz}{\sqrt{2+z^2}} = \ln\left(z+\sqrt{2+z^2}\right)\Big|_1^2 = \ln\frac{2+\sqrt{6}}{1+\sqrt{3}},\ J_2 = \int_1^2 \frac{dz}{(z^2+1)\sqrt{2+z^2}}.$$

J_2 интегралын исәпләү өчен, яңа үзгәрешле кертәбез:

$$t = \frac{z}{\sqrt{2+z^2}};\ z = \frac{\sqrt{2}\,t}{\sqrt{1-t^2}};\ dz = \frac{\sqrt{2}\,dt}{(1-t^2)\sqrt{1-t^2}}.$$

Яңа интеграллау чикләрен табабыз:

z	1	2
t	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{2}{\sqrt{6}}$

Моннан

$$J_2=\int_1^2 \frac{dz}{(z^2+1)\sqrt{2+z^2}}=\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{2}{\sqrt{6}}} \frac{dt}{(t^2+1)}=\operatorname{arctg} t\Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{2}{\sqrt{6}}}=\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{6}}-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Димәк, $\int_1^2 \frac{\sqrt{2+z^2}}{1+z^2}dz=\ln\frac{2+\sqrt{6}}{1+\sqrt{3}}+\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{6}}-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$ була.

10.2. Анык интеграл ярдәмендә геометрик мәсьәләләрне чишү

1) Билгеле булганча, тискәре булмаган функциянең интегралы — тиңдәшле кәкресызыклы трапециянең мәйданы ул. Анык интегралны исәпләүнең төп формуласын *Ньютон-Лейбниц формуласы* дип атыйлар һәм $\int_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$ рәвешендә язалар.

2) Әгәр функция параметрик рәвештә, ягъни $x=\varphi(t)$, $y=\psi\ (t)$ дип (биредә $\alpha\le t\le\beta$ һәм $\varphi(\alpha)=\varphi(\beta)$; $\psi(\alpha)=\psi(\beta)$) бирелгән булса, ул вакытта мәйдан

$$S=\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta \psi(t)\,d\left[\varphi(t)\right]=\int_\alpha^\beta \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt$$

формуласы буенча исәпләнә.

3) Әгәр функция поляр координаталар системасында бирелгән булса, мәйдан

$$S=\int_{\varphi_0}^{\varphi} \rho^{\,2}(\varphi)\,d\varphi$$

формуласы буенча исәпләнә.

4) Күләмнәрне исәпләгәндә, $V=\int_a^b S(x)\,dx$ формуласы кулланыла, биредә $S(x)$ — кисем яки нигез мәйданы.

5) Әйләнү фигураларының күләмен исәпләү өчен, $V=\pi\int_a^b y^2dx$ яисә $V=\pi\int_a^b (y_2^2-y_1^2)dx$ формуласы кулланыла.

Әгәр фигура Oy күчәре тирәсендә әйләнсә,

$$V=\pi\int_{y_1}^{y_2} x^2dy,\ \ y_1<y_2.$$

10.3. Кәкре дугасы озынлыгын исәпләү

1) $f(x)$ функциясенең $[a;b]$ интервалында өзлексез чыгарылмасы булса, $y=f(x)$ тигезләмәсе белән бирелгән дуга озынлыгы $L=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}\,dx$ формуласы буенча исәпләнә.

2) Әгәр $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ функцияләренең $[\alpha;\beta]$ кисемтәсендә өзлексез чыгарылмалары булып, $\varphi'(t)\geq 0$ булса, параметрлар ярдәмендә бирелгән кәкренең дуга озынлыгы

$$L=\int_a^b\sqrt{(x_1')^2+(y_1')^2}\,dt$$

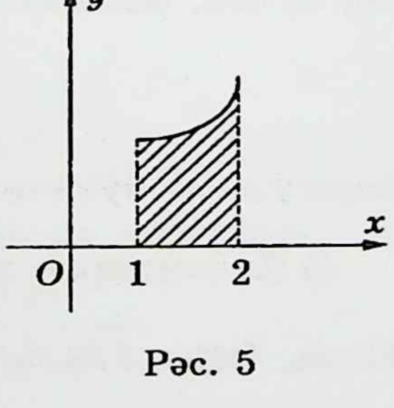
формуласы буенча исәпләнә.

3) Әгәр кәкре поляр координаталар системасында бирелгән, ягъни $r=r(\varphi)$, $\varphi_0\leq\varphi\leq\Phi$ булса, кәкренең дуга озынлыгы $L=\int_\varphi^\Phi\sqrt{(r_\varphi')^2+(r)^2}\,d\varphi$ формуласы буенча исәпләнә.

10.4. Җисемне әйләндерүдән килеп чыккан өслек мәйданы

1) Өслек мәйданы $P=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx$ формуласы буенча исәпләнә.

2) Әгәр функция параметрик рәвештә бирелгән булса, $P=2\pi\int_\alpha^\beta\psi(t)\sqrt{(x_1')^2+(y_1')^2}\,dt$ формуласы буенча исәпләнә.



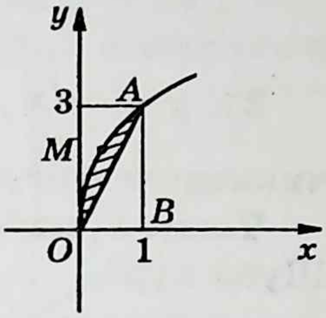
Рәс. 5

17. $y=e^x$ кәкресе, Ox күчәре, $x=1$ һәм $x=2$ турылары белән чикләнгән фигураның мәйданын табарга (рәс. 5).

Чишү. Эзләнелә торган мәйдан $S = \int\limits_1^2 e^x dx = e^x \Big|_1^2 = e^2 - e =$ $= e(e-1)$ була.

18. $y^2 = 9x$ кәкресе һәм $y = 3x$ турысы белән чикләнгән фигураның мәйданын табарга.

Чишү. Эзләнелә торган мәйдан $OMAB$ фигурасы һәм турыпочмаклы OAB өчпочмагы мәйданнары аермасына тигез. Бирелгән функцияләрнең графикларын сызгач, кисешү нокталарының абсциссаларын $\begin{cases} y = 3\sqrt{x}, \\ y = 3x \end{cases}$ тигезләмәләр системасын чишеп табабыз:



$$\left(3x = 3\sqrt{x}\right) \Rightarrow \left(x = \sqrt{x}\right) = 0,\ x = 0,\ x = 1.$$ Димәк,

$$S = \int\limits_0^1 \sqrt{9x}\, dx - \int\limits_0^1 3x\, dx = \left(3 \cdot \frac{2}{3} \sqrt[3]{x^2} - \frac{3x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}.$$

19. $y_1 = 2x - \dfrac{x^2}{4}$ параболасы белән $y_2 = \dfrac{x}{4} + \dfrac{3}{2}$ турысы кисешүдән килеп чыккан фигураның мәйданын табарга.

Чишү. Әгәр дә бу функцияләрнең графикларын сызсак, кисешү нокталарының абсциссаларын $\begin{cases} y_1 = 2x - \dfrac{x^2}{4}, \\ y_2 = \dfrac{x}{4} + \dfrac{3}{2} \end{cases}$ тигезләмәләр системасыннан табабыз:

$$\left(2x - \frac{x^2}{4} = \frac{x}{4} + \frac{3}{2}\right) \Rightarrow x = 1,\ x = 6.$$

Димәк, $S = \int\limits_1^6 (y_1 - y_2)dx = \int\limits_1^6 \left(\dfrac{7x}{4} - \dfrac{3}{2} - \dfrac{x^2}{4}\right)dx = \dfrac{125}{24}$ була.

20. $xy = 1$ кәкресе, $y = x$, $x = 4$ һәм $y = 0$ турылары белән чикләнгән фигураның мәйданын исәпләргә.

Чишү. Функцияләрнең кисешү нокталарын табабыз:

$$\begin{cases} y = x, \\ y = \dfrac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow x = 1.$$

Эзләнелә торган мәйдан S_1 һәм S_2 мәйданнары суммасына тигез була:

$$S_1 = \int_0^1 x dx,\ S_2 = \int_1^4 \frac{dx}{x},$$

$$S = S_1 + S_2 = \int_0^1 x dx + \int_1^4 \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \ln|x|\Big|_1^4 = \frac{1}{2} + \ln 4.$$

21. $y = -\sqrt{x}$, $x = \frac{\sqrt{y}}{2}$ кәкреләре һәм $x = 4$ турысы белән чикләнгән фигураның мәйданын табарга.

Чишү. S_1 мәйданы өстән $y = 4x^2$ кәкресе белән чикләнгән. Шуңа күрә

$$S_1 = \int_0^4 4x^2 dx = \frac{4x^3}{3}\Big|_0^4 = \frac{256}{3},\ S_2 = -\left(\int_0^4 -\sqrt{x}dx\right) = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\Big|_0^4 = \frac{16}{3}.$$

Ул вакытта эзләнелә торган мәйдан S түбәндәгечә табыла:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{256}{3} + \frac{16}{3} = \frac{272}{3}.$$

22. $x = a\,(t - \sin t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$ циклоидасының бер аркасы һәм Ox күчәре белән чикләнгән фигураның мәйданын табарга.

Чишү. Бирелә $dx = a(1 - \cos t)\,dt$, $0 \le t \le 2\pi$. Шулай булгач,

$$S = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)\, a\,(1 - \cos t)\, dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2\, dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)\, dt = a^2 \left(t - 2\sin t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi} =$$

$= 3\pi a^2$ була.

23. $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ кәкресе белән чикләнгән фигураның мәйданын табарга.

Чишү. Бу — параметрик рәвештә бирелгән функция. Аның графигы *эллипс* дип атала һәм координаталар күчәре эллипсны дүрт тигез кисәккә бүлә. Шуңа күрә без эзләнелә торган мәйданның $\frac{1}{4}$ өлешен табып, 4 кә тапкырлыйбыз. Биредә $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ гә кадәр үзгәрә.

$$S = -4\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t a\sin t\,dt = 4ab\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} b\sin^2 t\,dt = 2ab\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)\,dt =$$

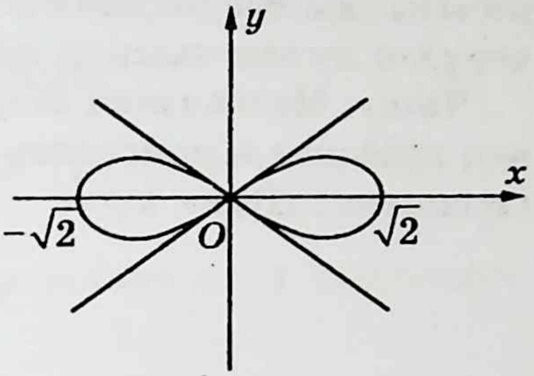
$$= 2ab\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab.$$

Әгәр $a = b$ булса, түгәрәк мәйданы була һәм $S = \pi a^2$.

24. $\rho^2 = 2\cos 2\theta$ лемнискатасы белән чикләнгән фигураның мәйданын табарга.

Чишү. Поляр координаталар системасында бирелгән лемниската рәсемдә күрсәтелгән рәвештә була. Дүрттән бер өлешенең мәйданын табып, дүрткә тапкырласак, эзләнелә торган мәйданны табабыз. Бирелә $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$. Шуңа күрә

$$S = 4\cdot\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\,d\theta = 2\sin 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2.$$



Рәс. 6

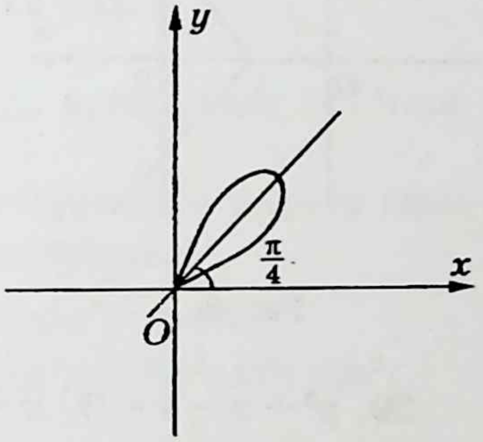
25. $\rho = 2\sin 2\varphi$ кәкресенең бер яфрагы белән чикләнгән мәйданын табарга.

Чишү. Бирелә $0 \le 2\varphi \le \pi$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$. Сызымда күрсәтсәк, мәйдан

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2 2\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}a^2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 4\varphi}{2}\,d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{4}\left(\varphi - \frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2}{4}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi a^2}{8}.$$



Рәс. 7

26. Радиусы R га тигез булган шарның күләмен табарга.

Чишү. $x^2 + y^2 = R^2$ түгәрәге, диаметры тирәли әйләнгәндә, шар күләмен тәшкил итә. Ординаталар күчәренә симметрик

булганга, эзләнелә торган күләмнең яртысын табып, аны икеләтәбез:

$$\frac{1}{2}V_ш = \pi\int_0^R \left(R^2 - x^2\right)dx = \pi\left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^R = \pi\left(R^3 - \frac{1}{3}R^3\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\pi R^3 \quad \Rightarrow \quad V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

27. $y = 2x - x^2$ һәм $y = 0$ сызыклары белән чикләнгән кәкресызыклы трапецияне абсциссалар күчәре тирәсендә әйләндерүдән килеп чыккан җисемнең күләмен табарга.

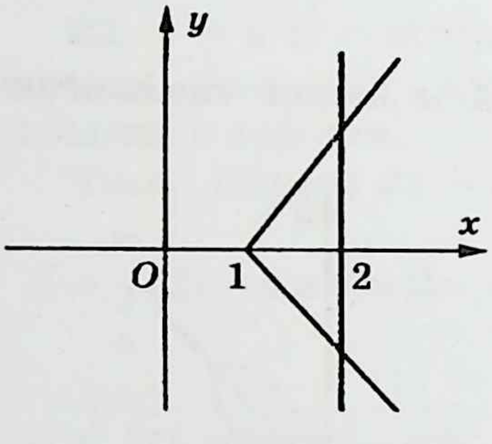
Чишү. Мәсьәләнең шарты буенча, $y = 2x - x^2$ функциясенең графигы абсциссалар күчәре тирәли [0; 2] кисемтәсендә урнашкан. Шуңа күрә

$$V = \pi\int_0^2 \left(2x - x^2\right)^2 dx = \pi\int_0^2 \left(4x^2 - 4x^3 + x^4\right)dx =$$

$$= \pi\left(\frac{4x^3}{3} - x^4 + \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^2 = \frac{16}{15}\pi.$$

28. $y^2 = (x - 1)^3$ кәкресе һәм $x = 2$ турысы белән чикләнгән фигура Ox күчәре тирәсендә әйләнүдән килеп чыккан җисемнең күләмен табарга.

Чишү. Мәсьәләнең шарты буенча сызым сызабыз. Моннан



Рәс. 8

$$V = \pi\int_1^2 y^2\,dx = \pi\int_1^2 (x - 1)^3\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\pi(x - 1)^4\Big|_1^2 = \frac{\pi}{4}.$$

29. $y^2 + x - 4 = 0$, $x = 0$ сызыклары белән чикләнгән кәкресызыклы трапецияне Oy күчәре тирәсендә әйләндерүдән килеп чыккан җисемнең күләмен табарга.

Чишү. Бирелгән шартлар нигезендә V ны табабыз:

$$V = 2\pi\int_0^2 (4 - y^2)^2\,dy = 2\pi\int_0^2 (16 - 8y^2 + y^4)\,dy =$$

$$= 2\pi\left(16y - \frac{8y^3}{3} + \frac{y^5}{5}\right)\Big|_0^2 = 34\frac{2}{15}\pi.$$

30. $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ кәкресенең $x = 0$ ноктасыннан $x = 1$ ноктасына кадәр дуга озынлыгын исәпләргә.

Чишү. Кәкренең дуга озынлыгы $L = \int\limits_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx$ формуласы белән исәпләнә.

Шулай булгач, $y' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$,

$$1+(y')^2 = 1+\frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2 = 1+\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4} = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2.$$

Димәк, бирелгән кәкренең озынлыгы

$$L = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(e^x+e^{-x}\right)dx = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(e - e^{-1}\right).$$

31. $y^2 = x^3$ кәкресенең $x = 0$ ноктасыннан $x = 1$ ноктасына кадәр дуга озынлыгын исәпләргә.

Чишү. $y = x\sqrt{x}$. Бу очракта $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$, $\left(y'\right)^2 = \frac{9}{4}x$. Моннан

$$L = \int\limits_0^1 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \sqrt{4+9x}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}\cdot\int\limits_0^1 (4+9x)^{\frac{1}{2}}\,d(4+9x) =$$

$$= \frac{8}{27}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{8}{27}\left(\frac{13}{8}\sqrt{13}-1\right).$$

32. $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ астроида дугасының озынлыгын табарга.

Чишү. Астроида координаталар күчәрләренә карата симметрик урнашкан. Чыгарылмаларны исәплик:

$$x_t' = -3a\cos^2 t\cdot\sin t,\quad y_t' = 3a\sin^2 t\cdot\cos t,$$

$$(x_t')^2 + (y_t')^2 = 9a^2\cos^2 t\,\sin^2 t\,(\cos^2 t+\sin^2 t) = 9a^2\cos^2 t\,\sin^2 t.$$

Моннан

$$\frac{1}{4}L = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2\cos^2 t\sin^2 t}\,dt = 3a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\sin t\,dt = 3a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,d(\sin t) =$$

$$= 3a\frac{\sin^2 t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}a$$ килеп чыга.

Шуңа күрә астроида дугасының озынлыгы $L = 4 \cdot \frac{3}{2} a = 6a$ була.

33. $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$ кәкресенең $t = 0$ ноктасыннан $t = \frac{\pi}{2}$ ноктасына кадәр дуга озынлыгын исәпләргә.

Чишү. Элек $x_t' = -3\cos^2 t \sin t$, $y_t' = 3\sin^2 t \cos t$ чыгарылмаларын табабыз:

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-3\cos^2 t \sin t)^2 + (3\sin^2 t \cos t)^2}\, dt =$$

$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\, dt = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\, d(\sin t) =$$

$$= \frac{3}{2}\sin^2 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}.$$

34. $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ кардиоида кәкресенең $\varphi = 0$ дән $\varphi = 2\pi$ гә кадәр үзгәргәндәге дуга озынлыгын табарга.

Чишү. Әгәр поляр почмак $0 \le \varphi \le \pi$ гә кадәр үзгәрсә, без эзләнә торган озынлыкның яртысын табабыз. Бу мисалда $\rho' = -a\sin\varphi$ була. Шулай булгач,

$$L = 2\int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = 2a\int_0^{\pi}\sqrt{2 + 2\cos\varphi}\, d\varphi =$$

$$= 2a\int_0^{\pi}\sqrt{2\frac{(1+\cos\varphi)}{2}\cdot 2}\, d\varphi = 8a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\, d\frac{\varphi}{2} = 8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a.$$

35. Радиусы R га тигез булган шарның өслек мәйданын исәпләргә.

Чишү. Әйләнә үзәге координаталар башлангычында урнашкан дип карыйбыз. $x^2 + y^2 = R^2$ әйләнәсе абсцисса күчәре тирәсендә әйләнгәндә, без эзләгән шар мәйданы килеп чыга. Моннан

$$y = \sqrt{R^2 - x^2},\ \ y' = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}},\ \ 1 + (y')^2 = 1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2} = \frac{R^2}{R^2 - x^2}.$$

Ул вакытта әйләнү өслеге формуласына куеп табабыз:

$$S = 2\pi\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2 - x^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\, dx = 4\pi R\int_0^R dx = 4\pi R x\Big|_0^R = 4\pi R^2.$$

36. $y^2 = 2px$ параболасы $x = 0$ ноктасыннан $x = a$ ноктасына кадәрге аралыкта Ox күчәре тирәсендә әйләнүдән хасил булган параболоид өслегенең мәйданын табарга.

Чишү.

$$y = \sqrt{2px}, \ \ y' = \frac{(2px)'}{2\sqrt{2px}} = \frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x}}, \ \ \sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+\frac{2p}{4x}} = \sqrt{\frac{2x+p}{2x}}.$$

Моннан гомуми формулага куеп табабыз:

$$S = 2\pi\int_0^a \sqrt{2px}\sqrt{\frac{2x+p}{2x}}\,dx = 2\pi\sqrt{p}\int_0^a \sqrt{2x+p}\,dx =$$

$$= \frac{2\pi\sqrt{p}}{2}\int_0^a (2x+p)^{\frac{1}{2}}\,d(2x+p) = \frac{2\pi\sqrt{p}}{3}(2x+p)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a =$$

$$= \frac{2\pi\sqrt{p}}{3}\left[(2a+p)^{\frac{3}{2}} - p^{\frac{3}{2}}\right].$$

37. $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ астроидасы Ox күчәре тирәсендә әйләнүдән килеп чыккан өслек мәйданын исәпләргә.

Чишү. Башта x_t', y_t' чыгарылмаларын табабыз:

$$x_t' = -3a\cos^2 t\sin t, \ \ y_t' = 3a\sin^2 t\cos t.$$

Шулай булгач,

$$\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2} = \sqrt{(-3a\cos^2 t\sin t)^2+(3a\sin^2 t\cos t)^2} = 3a\sin t\cos t.$$

Моннан

$$S = 2\cdot 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a^2\sin^3 t\cos t\sin t\,dt = 12\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\,d(\sin t) =$$

$$= 12\pi a^2\cdot\frac{1}{5}\sin^5 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{12}{5}\pi a^2.$$

КҮНЕГҮЛӘР

713. $\int_2^3 3x^2dx.$

714. $\int_{-1}^7 \frac{dt}{3t+4}.$

715. $\int_1^2\left(3x^2+\cos x+\frac{1}{x}\right)dx.$

716. $\int_3^4\left(\sqrt{x}+\frac{1}{1+x^2}\right)dx.$

717. $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$.

718. $\int_0^2 \frac{z^2\,dz}{\sqrt{13+z^3}}$.

719. $\int_{-1}^0 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{4-x^3}}$.

720. $\int_1^e \frac{dz}{z\sqrt{1-(\ln z)^2}}$.

721. $\int_0^{16} \frac{dz}{\sqrt{z+9}-\sqrt{z}}$.

722. $\int_0^1 \frac{zdz}{(z^2+1)^2}$.

723. $\int_0^{-3} \frac{dt}{\sqrt{25+3t}}$.

724. $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{t}}{t^2}\,dt$.

725. $\int_0^1 \frac{t\,dt}{\sqrt{1+t^2}}$.

726. $\int_1^3 x^3\sqrt{x^2-1}\,dx$.

727. $\int_0^1 \frac{zdz}{1+z^4}$.

728. $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2}\,dt$.

729. $\int_e^1 t^2 \ln t dt$.

730. $\int_0^\pi t^3 \sin t dt$.

731. $\int_0^a \sqrt{a^2-t^2}\,dt$.

732. $\int_0^1 te^{-t}dt$.

733. $\int_{-b}^b t\cos\frac{t}{b}\,dt$.

734. $\int_0^1 t^3 e^{2t}dt$.

735. $\int_0^\pi e^t \sin t dt$.

736. $\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx$.

737. $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.

738. $\int_0^5 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+3x}}$.

739. $\int_0^1 \frac{x\,dx}{1+\sqrt{x}}$.

740. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

741. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$.

742. $\int_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{1+3x}}$.

743. $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$.

744. $\int_0^1 \frac{\sqrt{e^x}\,dx}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}$.

745. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x^5\sqrt{1+x^2}\,dx.$

746. $\int\limits_0^1 x^7 e^{-x^2}\,dt.$

747. $\int\limits_0^1 \frac{e^{2x}\,dx}{1+e^x}.$

748. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}.$

749. $\int\limits_0^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}.$

750. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cdot\cos^2 x\,dx.$

751. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\sin x}{\cos^3 x}\,dx.$

752. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dz}{3+2\cos z}.$

753. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2\sin^2 x+1}.$

754. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\mathrm{tg}^2\varphi}{1+\mathrm{tg}\varphi}\,d\varphi.$

755. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\sqrt{\cos\varphi}\,d\varphi.$

756. $\int\limits_0^{2\pi} \cos z\cos 5z\,dz.$

757. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 2z\cos^3 z\,dz.$

758. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} z\sin z\cos z\,dz.$

759. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 z}{\cos z}\,dz.$

760. $y=2x^3$ кәкресе, Ox күчәре һәм $x=-1$, $x=2$ турылары белән чикләнгән фигураның мәйданын табарга.

761. $y=x^2-6x+10$ һәм $y=2+4x-x^2$ параболалары белән чикләнгән фигураның мәйданын табарга.

762. $y=x^2+4x$ параболасы һәм $x-y+4=0$ турысы белән чикләнгән фигураның мәйданын табарга.

763. $y=-x^2+7x-10$ параболасы һәм Ox күчәре белән чикләнгән фигураның мәйданын табарга.

764. $y^2=x$ кәкресе һәм $x-y=0$ турысы белән чикләнгән фигураның мәйданын табарга.

765. $y=\frac{x^2}{2}$ параболасы $x^2+y^2=8$ түгәрәген ике кисәккә бүлә. Ике кисәкнең дә мәйданнарын табарга.

766. $y=2-x^2$ һәм $y^3=x^2$ кәкреләре белән чикләнгән фигураның мәйданын табарга.

767. $y = 4x - x^2$ параболасы һәм абсциссалар күчәре белән чикләнгән фигураның мәйданын табарга.

768. $y^2 = 2px$ һәм $x^2 = 2py$ параболалары белән чикләнгән фигураның мәйданын табарга.

769. $y = 2^x$ кәкресе һәм $y = 2$, $x = 0$ турылары белән чикләнгән фигураның мәйданын исәпләргә.

770. $y = \frac{x^2}{3}$ һәм $y = 4 - \frac{2}{3}x^2$ параболалары белән чикләнгән фигураның мәйданын табарга.

771. $y = x - x^2\sqrt{x}$ кәкресе һәм абсциссалар күчәре белән чикләнгән фигураның мәйданын исәпләргә.

772. $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ астроидасы белән чикләнгән фигураның мәйданын табарга.

773. $x = 2a\cos t - a\cos 2t$, $y = 2a\sin t - a\sin 2t$ кардиоидасы белән чикләнгән фигураның мәйданын исәпләргә.

774. $x = 2t - t^2$, $y = 2t^2 - t^3$ кәкреләре белән чикләнгән фигураның мәйданын табарга.

775. $x = 12\cos t + 5\sin t$, $y = 5\cos t - 12\sin t$ кәкреләре белән чикләнгән фигураның мәйданын исәпләргә.

776. $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$ лемнискатасы белән чикләнгән фигураның мәйданын исәпләргә.

777. $\rho = 3 + 2\cos\varphi$ кәкресе белән чикләнгән фигураның мәйданын исәпләргә.

778. $x = 0$, $x = 3$ һәм $y = \sqrt{x}$ сызыклары белән чикләнгән кәкресызыклы трапецияне абсциссалар күчәре тирәсендә әйләндерүдән килеп чыккан җисемнең күләмен табарга.

Түбәндәге сызыклар белән чикләнгән фигураларны күчәрләр тирәсендә әйләндерүдән барлыкка килгән җисемнең күләмен табарга:

779. $y = \sin x$ $(0 \le x \le \pi)$.

780. $y^2 = 2px$, $x = a$ (Ox күчәре тирәсендә).

781. $y = \frac{x^2}{2}$, $2x + 2y - 3 = 0$ (Ox күчәре тирәсендә).

782. $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$, $x = 0$, $x = b$ (Ox күчәре тирәсендә).

783. $y = 2x - x^2$ (Ox күчәре тирәсендә).

784. $y = 2x - x^2$ (Oy күчәре тирәсендә).

785. Радиусы R га тигез булган әйләнәнең озынлыгын исәпләргә.

786. $ay^2 = x^3$ кәкресенең координаталар башлангычыннан абсциссасы $x = 5a$ булган ноктага кадәрге дуга озынлыгын табарга.

787. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ кәкресенең озынлыгын исәпләргә.

788. $9y^2 = 4(3 - x)^3$ кәкресенең Oy күчәрен кисүче нокталары арасындагы дуга озынлыгын табарга.

789. $y = 1n\ (1 - x^2)$ кәкресенең $x = 0$ ноктасыннан $x = \frac{1}{2}$ ноктасына кадәрге дуга озынлыгын табарга.

790. $y = e^x$ кәкресенең $(0;\ 1)$ ноктасы белән $(1;\ e)$ ноктасы арасындагы дуга озынлыгын табарга.

791. $5y^3 = x^2$ ярымкуб параболасының $x^2 + y^2 = 6$ әйләнәсе эчендәге дуга озынлыгын табарга.

792. $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$ кәкресенең $y = 1$ һәм $y = e$ нокталары арасындагы дуга озынлыгын исәпләргә.

793. $t = 0$ дән $t = 2\pi$ гә кадәр үзгәргәндә, $x = a\ (t - \sin t)$, $y = a\ (1 - \cos t)$ кәкресенең дуга озынлыгын табарга.

794. $t = 0$ дән $t = \frac{\pi}{2}$ гә кадәр үзгәргәндә, $x = \cos^4 t$, $y = \sin^4 t$ кәкресенең дуга озынлыгын табарга.

795. $t = 0$ дән $t = \frac{\pi}{2}$ гә кадәр үзгәргәндә, $x = 8 \sin t + 6 \cos t$, $y = 6 \sin t - 8 \cos t$ кәкресенең дуга озынлыгын табарга.

796. $t = 0$ дән $t = ln\pi$ гә кадәр үзгәргәндә, $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$ кәкресенең дуга озынлыгын табарга.

797. $\varphi_1 = 0$ дән $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ гә кадәр үзгәргәндә, $\rho = \sin^3 \frac{\varphi}{3}$ кәкресенең дуга озынлыгын табарга.

798. $\varphi_1 = 0$ дән $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ гә кадәр үзгәргәндә, $\rho = a\cos^3 \frac{\varphi}{2}$ кәкресенең дуга озынлыгын табарга.

799. $y = \sin 2x$ синусоидасының $x = 0$ дән $x = \frac{\pi}{2}$ гә кадәр интервалындагы өлеше әйләнүдән килеп чыккан өслекнең мәйданын табарга.

800. $y = x^3$ кәкресенең $x = 0$ дән $x = \frac{1}{2}$ гә кадәр арадагы өлеше әйләнүдән килеп чыккан өслекнең мәйданын табарга.

801. $x = a\,(t - \sin t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$ циклоидасының бер а́ркасы Ox күчәре тирәсендә әйләнүдән килеп чыккан өслек мәйданын табарга.

802. $\rho = a\,(1 + \cos\varphi)$ кардиодасы $\varphi = 0$ дән $\varphi = \pi$ аралыгында поляр күчәр тирәсендә әйләнүдән килеп чыккан өслек мәйданын табарга.

803. $\rho^2 = a^2\cos\varphi$ лемнискатасы $\varphi = 0$ дән $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ кә кадәр үзгәргәндә, поляр күчәр тирәсендә әйләнүдән килеп чыккан өслек мәйданын табарга.

10.5. Чикләмәләре чиксез булган интеграллар

а) $\int\limits_a^b f(x)dx$ интегралында b $+\infty$ кә омтылганда, анык интегралның чикләмәсе булса, андый интеграллар *җыелучан*, ә чикләмәсе булмаса *таралучан* яки *читләшкән интеграл* дип атала. Ул түбәндәгечә исәпләнә.

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx,$$

$$\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx, \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int\limits_a^b f(x)dx\,.$$

б) Чикләнмәгән функцияләрне интеграллау. Ә $y = f(x)$ функциясе интеграллау кисемтәсендә чиксез өзелүчән булып, ә $[a+\varepsilon\,,\ b]$, $[a\,,\ b-\varepsilon\,]$ өзлексез булса, андый интеграллар түбәндәгечә исәпләнә.

$$\int\limits_b^a f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)dx, \quad \int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx\,.$$

Ә $y = f(x)$ функциясе $[a\,,\ b]$ интервалының эчке ноктасында өзелүчән булса, әйтик нindидер c ноктасында, аны *үзенчәлекле нокта* дип атыйлар. Андый интеграллар түбәндәгечә исәпләнә.

$$\int\limits_b^a f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{c+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

Андый интеграллар җыелучан да, таралучан да булулары мөмкин.

38. $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ ны исәпләргә.

Чишү.

$$\lim_{b\to\infty}\int\limits_1^b\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_1^b=\lim_{b\to\infty}(\operatorname{arctg}b-\operatorname{arctg}1)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

39. $\int\limits_{-\infty}^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx$ ны исәпләргә.

Чишү.

$$\lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=\lim_{a\to-\infty}(-\cos x)\Big|_a^{\frac{\pi}{2}}=\lim_{a\to-\infty}\left(-\cos\frac{\pi}{2}+\cos a\right)=\lim_{a\to-\infty}\cos a.$$

a – ∞ кә омтылганда, cos a ның чикләмәсе юк. Димәк, читләшкән интеграл таралучан була.

40. $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ны исәпләргә.

Чишү. Интеграласты функциясе $x=1$ ноктасыннан башка ($x=1$ үзенчәлекле нокта) өзлексез була. Читләшкән интеграл билгесенә таянып,

$$\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{E\to0}\arcsin x\Big|_0^{1-\varepsilon}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\arcsin(1-\varepsilon)=\arcsin1=\frac{\pi}{2}.$$

Бирелгән интеграл җыелучан була.

КҮНЕГҮЛӘР

804. $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^4}$

805. $\int\limits_0^1\frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$

806. $\int_0^1 \ln x dx$

813. $\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}} dx$

807. $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$

814. $\int_0^1 x \ln x dx$

808. $\int_2^\infty \frac{\ln x}{x} dx$

815. $\int_1^2 \frac{dx}{x \ln x}$

809. $\int_0^\infty e^{-ax} dx \ (a > 0)$

816. $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

810. $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

817. $\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x \ln^2 x}$

811. $\int_0^\infty x e^{-x^2} dx$

818. $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3}$

812. $\int_0^\infty x \sin x dx$

819. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$

820. $\int_{-1}^1 \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}} dx$

XI бүлек

КАБАТЛЫ ИНТЕГРАЛЛАР

11.1. Икеле интеграл һәм аны ике тапкыр интеграллап чишү

Йомык $\overline{D}$ өлкәсендә $f(x, y)$ функциясе өзлексез булсын. Бу өлкәне координаталар күчәрләренә параллель булган турылар челтәре белән мәйданнары ΔS_1, ΔS_2, ..., ΔS_n булган n өлкәгә бүлеп, һәр өлкәдә ирекле $P_k(\zeta_k, \eta_k)$, $k = 1, 2, ..., n$, нокталарын сайлап алабыз да һәр ноктада функциянең кыйммәтен исәплибез һәм

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\Delta S_i \tag{1}$$

суммасын төзибез. Бу сумма f функциясенең D өлкәсендәге *интеграль суммасы* дип атала.

n чиксез үскәндә һәм аерым өлкәләрнең иң зур диаметры нульгә омтылганда, (1) интеграль суммасының D өлкәсен ничек бүлүгә һәм бу кисәкләрдә P_k нокталарын ничек сайлауга бәйләнмәгән чикле чикләмәсе булса, ул чикләмә функциянең D өлкәсендәге *икеле интегралы* дип атала һәм

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy$$

символы белән тамгалана.

Әгәр Oy күчәренә параллель турылар D өлкәсенең чикләрен иң күбе ике ноктада кисеп үтсәләр, ул өлкә $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$, $a \le x \le b$ тигезсезлекләре аша билгеләнә.

Биредә $y = \varphi_1(x)$ һәм $y = \varphi_2(x)$ — түбән һәм югары чик сызыклары тигезләмәләре, a һәм b — D өлкәсенең сул һәм уң чик нокталары. Ул вакытта икеле интеграл

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy \tag{2}$$

формуласы аша күрсәтелә.

Әгәр Ox күчәренә параллель турылар D өлкәсенең чикләрен иң күбе ике ноктада кисеп үтсәләр, ул $\psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)$, $c \le y \le d$ тигезсезлекләре аша билгеләнә.

Биредә $x = \psi_1(y)$ һәм $x = \psi_2(y)$ — сул һәм уң чик сызыклары, c һәм d — D өлкәсенең аскы һәм өске чик нокталары. Ул вакытта икеле интеграл

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\,dx \qquad (3)$$

формуласы аша күрсәтелә.

Күп вакытта катлаулырак төрдәге өлкәләрне, (2) һәм (3) формулаларын кулланып булырлык, гадирәк өлкәләргә бүлеп күрсәтәләр.

Кайбер мәсьәләләрнең чишелешен карап үтик.

1. Кабатлы интегралның интеграллау тәртибен үзгәртергә:

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y)\,dx.$$

Чишү. Интеграллау чикләре буенча

$$\psi_1(y) = -\sqrt{1-y^2}\,,\ \psi_2(y) = 1 - y.$$

$y = 0$, $y = 1$ интеграллау өлкәсен төзик. D өлкәсе өстән

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & -1 \le x \le 0 \text{ булганда,} \\ 1 - x, & 0 < x \le 1 \text{ булганда} \end{cases}$$

кәкресе белән, ә астан $y = 0$ турысы белән чикләнгән. Моннан интеграл

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y)\,dy = \int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y)\,dy$$

рәвешен ала.

2. D өлкәсе $y = x - 4$ турысы һәм $y^2 = 2x$ параболасы белән чикләнгән булса, $\iint_D xy\,dxdy$ икеле интегралын исәпләргә.

Чишү. Бирелгән сызыкларны (2; −2) һәм (8; 4) кисешү нокталары арасында төзеп, без AOB параболасы сегментын табабыз (сызымын сызарга). Әгәр икеле интегралны башта

x буенча, аннары y буенча интегралласак, ул бу өлкәдә

$$I = \iint_D xy\,dxdy = \int_{-2}^{4} ydy \int_{\frac{1}{2}y^2}^{y+4} x\,dx$$

рәвешен ала. Икеле интегралны исәпләп табабыз:

$$I = \int_{-2}^{4} ydy \frac{x^2}{2}\Bigg|_{\frac{y^2}{2}}^{y+4} = \frac{1}{2}\int_{-2}^{4} y\left[(y+4)^2 - \frac{y^4}{4}\right]dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{4}\left(y^3 + 8y^2 + 16y - \frac{y^5}{4}\right)dy =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{y^4}{2} + \frac{8y^3}{3} + 8y^2 - \frac{y^6}{24}\right)\Bigg|_{-2}^{4} = 90.$$

КҮНЕГҮЛӘР

Икеле интегралларның интеграллау тәртибен үзгәртегез:

821. $\int_{-2}^{6} dx \int_{-3-\sqrt{12+4x-x^2}}^{-3+\sqrt{12+4x-x^2}} f(x,y)\,dy.$

822. $\int_{0}^{4} dx \int_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} f(x,y)\,dy.$

823. $\int_{0}^{1} dy \int_{\frac{y^2}{9}}^{y} f(x,y)\,dx + \int_{1}^{3} dy \int_{\frac{y^2}{9}}^{1} f(x,y)\,dx.$

824. $\int_{-2}^{2} dx \int_{0}^{\frac{x+2}{2}} f(x,y)\,dy + \int_{2}^{\frac{10}{3}} dx \int_{\sqrt{x^2-4}}^{\frac{x+2}{2}} f(x,y)\,dy.$

Интегралларны исәпләгез:

825. $\iint_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy$, биредә D өлкәсе $y = x$, $x + y = 2a$, $x = 0$ кәкреләре белән чикләнгән.

826. $\iint_D \sqrt{xy - y^2}\,dx\,dy$, биредә D өлкәсе — түбәләре $A(1;\ 1)$, $B(5;\ 1)$, $C(10;\ 2)$, $D(2;\ 2)$ булган трапеция.

827. $\iint\limits_D xy\,dxdy$, биредә D өлкәсе $x+y=2$, $x^2+y^2=2y$ $(x>0)$ кәкреләре белән чикләнгән.

828. $\iint\limits_D y\,dxdy$, биредә D өлкәсе — түбәләре $O\,(0;\ 0)$, $A(1;\ 1)$, $B(0;\ 1)$ булган өчпочмак.

829. $\iint\limits_D (x+2y)\,dxdy$, биредә D өлкәсе $y=x^2$ һәм $y=\sqrt{x}$ кәкреләре белән чикләнгән.

830. $\iint\limits_D (4-y)\,dxdy$, биредә D өлкәсе $x^2=4y$, $y=1$, $x=0$ $(x>0)$ кәкреләре белән чикләнгән.

831. $\iint\limits_D \frac{x}{x^2+y^2}\,dxdy$, биредә D өлкәсе $y=x\,\mathrm{tg}x$, $y=x$, $x=\frac{\pi}{8}$, $\left(x \geq \frac{\pi}{8}\right)$ кәкреләре белән чикләнгән.

832. $\iint\limits_D \sqrt{a^2+x^2}\,dxdy$, биредә D өлкәсе $y^2-x^2=a^2$, $x=a$, $x=0$, $y=0$, $(y>0,\ a>0)$ кәкреләре белән чикләнгән.

833. $\iint\limits_D e^{x+y}dxdy$, биредә D өлкәсе $y=e^x$, $x=0$, $y=2$ кәкреләре белән чикләнгән.

834. $\iint\limits_D x^2y\,dxdy$, биредә D өлкәсе беренче чиректә ята, $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ эллипс дугасы һәм координаталар күчәрләре белән чикләнгән $\left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$.

11.2. Икеле интегралда үзгәрешлеләрне алмаштыру

Ике яссылыкта Oxy һәм Ouv координаталар системаларын карыйк. Бу координаталар системаларында тиңдәшле рәвештә D һәм D^* өлкәләрен алыйк.

$$x=\varphi(u,\ v) \text{ һәм } y=\psi(u,\ v) \tag{4}$$

функцияләре D^* өлкәсен D өлкәсенә өзлексез дифференциалланучы үзара беркыйммәтле итеп чагылдырсын. Бу D өлкәсен D^* өлкәсенә өзлексез дифференциалланучы $u=\eta(x,\ y)$ һәм $v=\chi(x,\ y)$ чагылдыруы булуын аңлата һәм D^* өлкәсендә үзгәртү якобианы нульдән аермалы, ягъни

$$I(u,v)=\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v}\\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v}\end{vmatrix}\neq 0. \quad (5)$$

Биредә u һәм v үзгәрешлеләрен D^* өлкәсе нокталары өчен турыпочмаклы координаталар итеп, шул ук вакытта D өлкәсе нокталары өчен кәкресызыклы координаталар итеп карарга мөмкин.

Әгәр $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ икеле интегралында үзгәрешлеләрне (4) формулалары буенча алмаштырсак, килеп чыккан интегралның интеграллау өлкәсе D^* өлкәсе була. Функцияне дөрес сайлап алганда, D^* өлкәсе D өлкәсенә караганда гадирәк килеп чыга һәм түбәндәге формула дөрес:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D^*} f(\varphi(u,v),\psi(u,v))\,|I(u,v)|\,dudv. \quad (6)$$

Кәкресызыклы координаталарның иң киң кулланылганнары — *поляр координаталар*: $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ һәм алар өчен

$$I(r,\varphi)=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{vmatrix}=r,$$

ә (6) формуласы

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D^*} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi$$

рәвешен ала.

Кайбер мәсьәләләрнең чишелешен карап үтик.

3. $\iint\limits_D \sqrt{xy}\,dxdy$ икеле интегралын исәпләргә. Биредә D өлкәсе $y^2=ax$, $y^2=bx$, $xy=q$, $xy=p$ ($0<a<b$, $0<p<q$) кәкреләре белән чикләнгән.

Чишү. $y^2=ux$, $v=xy$ формулалары буенча u һәм v үзгәрешлеләренә күчәбез. Ул вакытта

$$x=u^{\frac{-1}{3}}v^{\frac{2}{3}},\quad y=u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}},$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}=-\frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}v^{\frac{2}{3}},\ \frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{3}},\quad \frac{\partial y}{\partial u}=-\frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{\frac{1}{3}},\quad \frac{\partial y}{\partial v}=\frac{1}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{2}{3}}.$$

$$I(u,v)=\begin{vmatrix} -\frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}v^{\frac{2}{3}} & \frac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{3}} \\ \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{2}{3}} \end{vmatrix}=-\frac{1}{3u}.$$

$|I(u,v)|=\frac{1}{3u}$ (биредә $u>0$), ә турыларның тигезләмәләре $u=a$, $u=b$, $v=p$, $v=q$ рәвешенә килә. Oxy яссылыгының D өлкәсе O^*uv яссылыгының D^* турыпочмаклыгы рәвешен ала. (6) формуласын кулланып табабыз:

$$\iint\limits_D\sqrt{xy}dxdy=\frac{1}{3}\iint\limits_{D^*}\frac{\sqrt{v}}{u}dudv=\frac{1}{3}\int\limits_a^b\frac{du}{u}\int\limits_p^q\sqrt{v}dv=\frac{2}{9}\left(q^{\frac{3}{2}}-p^{\frac{3}{2}}\right)\ln\frac{b}{a}.$$

4. Поляр координаталарга күчеп исәпләргә:

$$\iint\limits_D\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy,$$

биредә D өлкәсе — үзәге координаталар башлангычында һәм радиусы $R=1$ булган түгәрәк.

Чишү. $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ дип алабыз. Моннан

$$\sqrt{1-x^2-y^2}=\sqrt{1-(r\cos\varphi)^2-(r\sin\varphi)^2}=\sqrt{1-r^2}$$

булуы ачык. D өлкәсендә теләсә нинди φ өчен r координатасы нульдән бергә кадәр, ә φ нульдән 2πгә кадәр үзгәргәнгә күрә,

$$\iint\limits_D\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr=\frac{2\pi}{3}.$$

КҮНЕГҮЛӘР

Икеле интегралны поляр координаталарга күчерегез:

835. $\int\limits_0^R dx\int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}}f(x,y)\,dy.$

836. $\int\limits_0^R dx\int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}}f(x^2+y^2)\,dy.$

837. $\int\limits_{0}^{\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}} dx \int\limits_{0}^{Rx} f\left(\frac{x}{y}\right) dy + \int\limits_{\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}}^{R} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} f\left(\frac{y}{x}\right) dy.$

Бирелгән икеле интегралны поляр координаталарга күчеп исәпләгез:

838. $\int\limits_{0}^{R} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln(1 + x^2 + y^2)dy.$

839. $\iint\limits_{D} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\, dxdy$, биредә D өлкәсе $x^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0,$ $y \ge 0$ тигезсезлекләре белән бирелә.

840. $\iint\limits_{D} (h - 2x - 3y)dxdy$, биредә D өлкәсе $x^2 + y^2 \le R^2$ түгәрәге.

841. $\iint\limits_{D} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dxdy$, биредә D өлкәсе $x^2 + y^2 \le Rx$ тигезсезлеге белән бирелә.

842. $\iint\limits_{D} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\, dxdy$, биредә D өлкәсе $x^2 + y^2 \ge 1,\ x^2 + y^2 \le 9,$ $y \ge \frac{x}{\sqrt{3}},\ y \le \sqrt{3}x$ боҗрасы кисәге.

Бирелгән интегралларда яңа u һәм v үзгәрешлеләренә күчегез һәм интеграллау чикләрен билгеләгез:

843. $\iint\limits_{D} f(x, y)\, dxdy$, биредә D өлкәсе $x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + y \le a$ тигезсезлекләре белән билгеләнә ($u = x + y,\ ay = uv$ дип алабыз).

844. $\iint\limits_{D} f(x, y)\, dxdy$, биредә D өлкәсе $x^2 = ay,\ x^2 = by,\ y^2 = px,$ $y^2 = qx$ ($0 < a < b,\ 0 < p < q$) кәкреләре белән чикләнгән ($x^2 = uy,\ y^2 = vx$ дип алабыз).

845. $\int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{1-x}^{3-x} f(x, y)\, dxdy$ ($u = x + y,\ v = x - y$ дип алабыз).

846. $\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy$, биредә D өлкәсе $xy = p$, $xy = q$, $y = ax$, $y = bx$ $(0 < a < b,\ 0 < p < q)$ кәкреләре белән чикләнгән ($u = xy$, $y = vx$ дип алабыз).

Икеле интегралларны исәпләгез:

847. $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{\sqrt{c^2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2}}}$ $(c > 1)$, биредә D өлкәсе $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ эллипсы белән чикләнгән ($x = ar\cos\varphi$, $y = br\sin\varphi$ формулалары ярдәмендә гомумиләштерелгән r һәм φ поляр координаталарына күчәргә).

848. $\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy$, биредә D өлкәсе $y = ax^3$, $y = bx^3$, $y^2 = px$, $y^2 = qx$ $(0 < a < b,\ 0 < p < q)$ сызыклары белән чикләнгән (кирәкле алмаштыруны сайлап алырга).

11.3. Икеле интегралларның кулланылышы

1) D өлкәсендә яссы S мәйданы

$$S = \iint\limits_D dxdy \tag{7}$$

формуласы белән билгеләнә. Әгәр D өлкәсе

$$a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)$$

тигезсезлекләре белән билгеләнсә, ул вакытта

$$S = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy$$

була.

2) Цилиндрик борыс өстән өзлексез $z = f(x, y)$ өслеге белән, астан $z = 0$ яссылыгы белән, ян-яклардан төзүчеләре Oz күчәренә параллель булган цилиндрик өслек белән чикләнгән булсын. Әгәр бу цилиндрик өслек Oxy яссылыгыннан D өлкәсен бүлеп алса, ул вакытта борысның күләме

$$V = \iint\limits_D f(x, y)\,dxdy \tag{8}$$

формуласы буенча исәпләнә.

3) Әгәр дә шома өслек беркыйммәтле $z = f(x, y)$ функциясе белән бирелсә, аның мәйданы

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy \tag{9}$$

формуласы ярдәмендә исәпләнә. Биредә D — бирелгән өслекнең Oxy яссылыгына проекциясе.

Кайбер мәсьәләләрнең чишелешен карап үтик.

5. $r = a(1+\cos\varphi)$ һәм $r = a\cos\varphi$ $(a>0)$ кәкреләре белән чикләнгән фигураның мәйданын табарга.

Чишү. Фигура Ox күчәренә карата симметрик булганга күрә, өске өлешенең мәйданын табып, аны икегә тапкырлыйбыз:

$$S = 2\iint_D r\,dr\,d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{a\cos\varphi}^{a(1+\cos\varphi)} r\,dr + 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi \int_0^{a(1+\cos\varphi)} r\,dr = \frac{5\pi a^2}{4}.$$

6. $z = 0$, $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $y = 1$ өслекләре белән чикләнгән T җисеменең күләмен табарга.

Чишү. $T = \{(x, y, z):\ (x, y) \in D,\ 0 \le z \le x^2 + y^2\}$, биредә D өлкәсе (x, y) яссылыгында $y = x^2$ һәм $y = 1$ кәкреләре белән чикләнгән, ягъни $D = \{(x, y):\ -1 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le 1\}$. Шулай булгач, (8) формуласын кулланып табабыз:

$$V = \iint_D (x^2 + y^2)\,dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} (x^2 + y^2)\,dy = \frac{88}{105}.$$

7. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ сферасының $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(b \le a)$ цилиндры эчендә урнашкан өлешенең мәйданын табарга.

Чишү. Цилиндр сфера белән кисешкәндә, аннан Oxy яссылыгына карата симметрик булган кисәкләр кисеп ала. Бу кисәкләрнең һәркайсы координаталар яссылыклары белән дүрт тигез өлешкә бүленә һәм $z \ge 0$ булганда,

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2},\quad 1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2 = \frac{a^2}{a^2 - x^2 - y^2}.$$

Димәк,

$$S = 8a\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} = 8a\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \frac{dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} = 8a^2 \arcsin\frac{b}{a},$$

биредә $D = \left\{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1,\ x > 0,\ y > 0\right\}$.

КҮНЕГҮЛӘР

Бирелгән өлкәләрнең мәйданнарын икеле интеграл ярдәмендә исәпләгез:

849. $y = x$, $y = 5x$, $x = 1$ турылары белән чикләнгән өлкәнең.

850. $y^2 = \dfrac{b^2}{a}x$ параболасы һәм $y = \dfrac{b}{a}x$ турысы арасында урнашкан өлкәнең.

851. $(x^2 + y^2)^2 = 2ax^3$ сызыгы белән чикләнгән өлкәнең.

852. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ сызыгы белән чикләнгән өлкәнең (Бернулли лемнискатасы).

853. Беренче квадратта ятучы $(x + y)^3 = xy$ сызыгы белән чикләнгән өлкәнең.

Бирелгән тигезләмәләр белән чикләнгән җисемнәрнең күләмнәрен табыгыз:

854. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{b^2} = 1$; $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0)$.

855. $z^2 - x^2 = a^2$, $z^2 - y^2 = a^2$, $z = a\sqrt{2}$ $(a > 0)$.

856. $y = x^2$, $z = y$, $z + y = 2$.

857. $x^2 - y^2 = 2az$, $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$ (цилиндр эчендә $a > 0$).

858. $x^2 + y^2 - 2z^2 = -a^2$, $2(x^2 + y^2) - z^2 = a^2$ $(a > 0)$.

Бирелгән өслекләрнең күрсәтелгән кисәкләренең мәйданнарын табыгыз:

859. $z^2 = x^2 + y^2$ өслегенең $z^2 = 2py$ цилиндры белән кисеп алынган өлешенең.

860. $z^2 + y^2 = x^2$ өслегенең $x^2 + y^2 = R^2$ цилиндры эчендә ятучы өлешенең.

861. $z^2 + y^2 = x^2$ өслегенең $x^2 - y^2 = a^2$ цилиндры һәм $y = b$ һәм $y = -b$ яссылыклары белән кисеп алынган өлешенең.

862. $z^2 = 4x$ өслегенең $y^2 = 4x$ цилиндры һәм $x = 1$ яссылыгы белән кисеп алынган өлешенең.

863. $z = xy$ өслегенең $x^2 + y^2 = R^2$ цилиндры белән кисеп алынган өлешенең.

864. $2z = x^2 + y^2$ өслегенең $x^2 + y^2 = 1$ цилиндры белән кисеп алынган өлешенең.

865. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ өслегенең $x^2 + y^2 = R^2$ $(R \le a)$ цилиндры белән кисеп алынган өлешенең.

866. $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ өслегенең $x^2 + y^2 = Rx$ цилиндры белән кисеп алынган өлешенең.

11.4. Өчле интеграл һәм аны кабатлы интеграллау ярдәмендә чишү

T — өч үлчәмле Евклид пространствосындагы өлкә һәм T өлкәсендә чикләнгән $u = f(M) = f(x, y, z)$ функциясе бирелгән булсын. T өлкәсен n кисәккә бүлеп, аның һәр өлкәсе T_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ дип тамгалыйбыз. Һәрбер T_i кисәгендә ирекле $M_i(\xi_i, \eta_i, \xi_i)$ ноктасы алабыз һәм

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta V_i \qquad (10)$$

суммасын төзибез, биредә ΔV_i —T_i нең күләме; T_i нең диаметры — d_i, ә $d = \max d_i\,(1 \le i \le n)$ булсын.

Әгәр d нульгә омтылганда, (10) интеграль суммасының чикле чикләмәсе булса һәм ул чикләмә T өлкәсен ничек бүлүгә һәм M_i ноктасын ничек сайлап алуга бәйләнмәгән булса, ул чикләмә *өчле интеграл* дип атала һәм

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

символы белән тамгалана.

Әгәр T өлкәсе астан $z = \varphi_1(x, y)$, өстән $z = \varphi_2(x, y)$, $\big(\varphi_1(x, y) \le$ $\le \varphi_2(x, y)\big)$ өслекләре белән һәм ян-яктан Oxy яссылыгы белән

кистергәндә, D өлкәсе килеп чыгарлык туры цилиндр белән чикләнгән булса, ул вакытта өчле интеграл

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz = \iint_D dxdy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \qquad (11)$$

формуласы ярдәмендә исәпләнә.

Кайбер мәсьәләләрнең чишелешен карап үтик.

8. Әгәр T өлкәсе $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ яссылыклары белән чикләнгән булса,

$$\iiint_T z\,dx\,dy\,dz$$

интегралын исәпләргә.

Чишү. (11) формуласын кулланып табабыз:

$$\iiint_T z\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} z\,dz = \frac{1}{24}.$$

9. $\iiint_T x^3y^2z\,dx\,dy\,dz$, биредә T өлкәсе $z = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 0$, $y = x$, $z = xy$ өслекләре белән чикләнгән.

Чишү. (11) формуласын кулланабыз:

$$\iiint_T x^3y^2z\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{xy} x^3y^2z\,dz = \frac{1}{110}.$$

КҮНЕГҮЛӘР

Өчле интегралны исәпләгез:

867. $\iiint_T xy^2z^3\,dx\,dy\,dz$, биредә T өлкәсе $z = xy$, $y = x$, $x = 1$, $z = 0$ өслекләре белән чикләнгән.

868. $\iiint_T \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3}$, биредә T өлкәсе $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ өслекләре белән чикләнгән.

869. $\iiint_T xyz\,dx\,dy\,dz$, биредә T өлкәсе $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ өслекләре белән чикләнгән.

870. $\iiint\limits_T \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right) dx\,dy\,dz$, биредә T өлкәсе

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ өслеге белән чикләнгән.

871. $\iiint\limits_T \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, биредә T өлкәсе $x^2+y^2=z^2$, $z=1$ өслекләре белән чикләнгән.

872. $\iiint\limits_T z^2 dx\,dy\,dz$, биредә T өлкәсе $x^2+y^2+z^2\le R^2$ һәм $x^2+y^2+z^2\le 2Rz$ шарларының уртак өлеше.

873. $\iiint\limits_T z\,dx\,dy\,dz$, биредә T өлкәсе $z=0$ яссылыгы һәм $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ эллипсоидының өске яртысы белән чикләнгән.

874. $\iiint\limits_T z\,dx\,dy\,dz$, биредә T өлкәсе $z^2=\frac{h^2}{R^2}\left(x^2+y^2\right)$ конусы һәм $z=h$ яссылыгы белән чикләнгән.

11.5. Өчле интегралда үзгәрешлеләрне алмаштыру

Ике өч үлчәмле пространствода $Oxyz$ һәм O^*uvw координаталар системаларын карыйк. Бу координаталар системаларында тиңдәшле рәвештә T һәм T^* өлкәләрен алыйк. $x=x(u,v,w)$, $y=y(u,v,w)$, $z=z(u,v,w)$ функцияләре T^* өлкәсен T өлкәсенә өзлексез дифференциалланучы үзара беркыйммәтле итеп чагылдырсын. Бу T өлкәсен T^* өлкәсенә өзлексез дифференциалланучы $u=\xi(x,y,z)$, $v=\eta(x,y,z)$, $w=\chi(x,y,z)$ чагылдыруы булуын аңлата. T^* өлкәсендә үзгәртү якобианы нульдән аермалы, ягъни

$$I(u,v,w)=\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}\neq 0$$

һәм түбәндәге формула дөрес:

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz =$$
$$= \iiint\limits_T f\left(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\right)\left|I\right| du\,dv\,dw. \qquad (12)$$

Кәкресызыклы координаталар арасында иң еш кулланыла торганнары:

1) цилиндрик координаталар: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$, аларның якобианы $I = r$;

2) сферик координаталар: $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$ $(0 \le r < +\infty,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi < 2\pi)$, аларның якобианы $I = r^2\sin\theta$.

Цилиндрик координаталар очрагында (12) формуласы

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{T^*} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi, z)rdrd\varphi dz \qquad (13)$$

рәвешен ала, ә сферик координаталарга күчкәндә,

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz =$$
$$= \iiint\limits_{T^*} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\cdot r^2\sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta \qquad (14)$$

рәвешендә була.

Кайбер мәсьәләләрнең чишелешен карап үтик.

Интегралны цилиндрик координаталарга күчеп исәпләгез:

10. $I = \iiint\limits_T \sqrt{x^2 + y^2}\,dx\,dy\,dz$, биредә T өлкәсе $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 1$ өслекләре белән чикләнгән.

Чишү. T җисеме $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ коник өслегенең бер өлеше һәм $z = 1$ яссылыгының бер өлеше белән чикләнгән, өстәвенә ул Oxy яссылыгының $x^2 + y^2 \le 1$ түгәрәгенә проекцияләнә. Интегралны цилиндрик координаталарга күчеп табабыз:

$$T = \left\{0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \rho \le 1,\ \rho \le z \le 1\right\},$$

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^1 \rho^2 d\rho\int\limits_\rho^1 dz = 2\pi\int\limits_0^1 \rho^2\left(1-\rho\right)d\rho = \frac{\pi}{6}.$$

Интегралны сферик координаталарга күчеп исәпләгез:

11. $I = \iiint\limits_T \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz,$ биредә T өлкәсе $x^2 + y^2 + z^2 \leq z$ тигезсезлеге белән бирелгән.

Чишү. Сферик координаталарга күчеп табабыз:

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \; 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

$$I = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\cos\theta} \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\, \sin\theta d\theta = \frac{\pi}{10}.$$

КҮНЕГҮЛӘР

Интегралларны цилиндрик координаталарга күчеп исәпләгез:

875. $\iiint\limits_T y\, dx\, dy\, dz,$ биредә T өлкәсе $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$, $z = h$ өслекләре белән чикләнгән.

876. $\iiint\limits_T z\, dx\, dy\, dz,$ биредә T өлкәсе $x^2 + y^2 = z^2$, $z = a$ өслекләре белән чикләнгән.

877. $\int_0^{\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} dy \int_{\frac{(x^2+y^2)}{3}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz.$

878. $\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} dx \int_0^{\frac{x^2-y^2}{a}} dz.$

879. $\int_{-a}^{a} dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_{\frac{h}{a^2}(x^2+y^2)}^{h} \sqrt{x^2 + y^2}\, dz.$

880. $\int_{-2}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy \int_{\frac{(x^2+y^2)}{dz}}^{2} \left(x^2 + y^2\right) dz.$

Интегралларны сферик координаталарга күчеп исәпләгез:

881. $\iiint\limits_T \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$, биредә T өлкәсе — үзәге координаталар башлангычында, радиусы a булган шар секторының эчке өлеше, түбәсе янындагы почмак 2α $(0 < \alpha < \pi)$. Секторның симметрия күчәрен Oz күчәрендә дип алырга.

882. $\iiint\limits_T xyz^2\,dx\,dy\,dz$, биредә T өлкәсе — $x^2+y^2+z^2=1$ сферасының $x>0$, $y>0$, $z>0$ ярымяссылыклары белән чикләнгән өлеше.

883. $\iiint\limits_T \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, биредә T өлкәсе — $x^2+y^2+z^2=a^2$ һәм $x^2+y^2+z^2=4a^2$ өслекләре арасындагы катлам.

884. $\int\limits_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} dx \int\limits_0^{\sqrt{\frac{R^2}{2}-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz.$

885. $\int\limits_0^{a} dx \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} z\,dz.$

886. $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \sqrt{z}\,dz.$

11.6. Өчле интегралларның кулланылышы

Пространствода бирелгән T өлкәсенең күләме

$$V = \iiint\limits_T dx\,dy\,dz \qquad (15)$$

формуласы ярдәмендә исәпләнә.

T өлкәсен биләп торган тыгызлыгы $\gamma(x, y, z)$ булган җисемнең массасы

$$M = \iiint\limits_T \gamma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \qquad (16)$$

формуласы белән исәпләнә.

Кайбер мәсьәләләрнең чишелешен карап үтик.

12. $az = x^2 + y^2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ өслекләре белән чикләнгән T җисеменең күләмен табарга.

Чишү. T җисеме Oxy яссылыгында $x^2 + y^2 = a^2$ әйләнәсенә проекцияләнүче әйләнү параболоиды өслегенең бер өлеше һәм коник өслекнең бер өлеше кисешүче кәкре буенча чикләнгән. Шуңа күрә T өлкәсен

$$\overline{T} = \left\{ -a \le x \le a,\ -\sqrt{a^2 - x^2} \le y \le \sqrt{a^2 - x^2},\ \frac{x^2 + y^2}{a} \le z \le \sqrt{y^2 + x^2} \right\}$$

рәвешендә күз алдына китереп була. T җисеменең нокталары Oxz һәм Oyz яссылыкларына карата симметрик. Шуңа күрә (15) формуласы нигезендә цилиндрик координаталарга күчәбез:

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a \rho d\rho \int_{\frac{\rho^2}{a}}^{\rho} dz = \frac{\pi a^3}{6}.$$

13. $x^2 + y^2 + z^2 \ge 1$ чиксез өлкәсен тәшкил итүче T җисеменең массасын табарга (җисемнең тыгызлыгы $\mu(x, y, z) = \mu_0 e^{-k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, биредә μ_0, k — уңай даимиләр).

Чишү. Башта $1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$ күләмен тәшкил итүче T җисем массасының санча кыйммәтен табабыз. Аның өчен (16) формуласын кулланабыз:

$$M = \iiint\limits_T \mu(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Бу интегралда сферик координаталарга күчәбез: $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $1 \le \rho \le R$.

$$M = \mu_0 \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^R e^{-k\rho} \cdot \rho^2 d\rho = 4\pi\mu_0 \int_1^R e^{-k\rho} \cdot \rho^2 =$$

$$= 4\pi\mu_0 \left(\frac{e^{-k} - R^2 e^{-kR}}{k} + \frac{2\left(e^{-k} - Re^{-kR}\right)}{k^2} + \frac{2\left(e^{-k} - e^{-kR}\right)}{k^3} \right).$$

Хәзер R ны чиксезлеккә омтылдырып чикләмәгә күчсәк табабыз:

$$M = 4\pi\mu_0 e^{-k}\left(\frac{1}{k} + \frac{2}{k^2} + \frac{2}{k^3}\right).$$

КҮНЕГҮЛӘР

Бирелгән өслекләр белән чикләнгән җисемнәрнең күләмнәрен табыгыз:

887. $z = x^2 + y^2,\ z = 2x^2 + 2y^2,\ y = x,\ y = x^2.$

888. $z = x + y,\ z = xy,\ x + y = 1,\ x = 0,\ y = 0.$

889. $x^2 + y^2 = a^2,\ x + y = \pm a,\ x - y = \pm a.$

890. $az = x^2 + y^2,\ z = \sqrt{x^2 + y^2}\ (a > 0).$

891. $az = a^2 - x^2 + y^2,\ z = a - x - y,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0\ (a > 0).$

892. $z = 6 - x^2 - y^2,\ z = \sqrt{x^2 + y^2}\ .$

893. $x^2 + y^2 + z^2 = 2az,\ x^2 + y^2 \le z^2.$

894. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2).$

895. $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz.$

896. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ x^2 + y^2 + z^2 = b^2,\ x^2 + y^2 = z^2 (z \ge 0).$

897. Әгәр M ноктасында җисемнең тыгызлыгы $\rho = x + y + z$ формуласы белән бирелсә, күләме 1 гә тигез булган ($0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$) җисемнең массасын табарга.

898. Ярымкүчәрләре a һәм b га тигез булган эллипс белән чикләнгән фигураның массасы болай билгеләнгән: аның тыгызлыгы зур күчәрдән ераклыкка пропорциональ һәм әлеге күчәрдән берәмлек ераклыкта γ га тигез. Барлык массаны табарга.

899. Әгәр ягы $2a$ га тигез булган квадрат пластинканың тыгызлыгы диагональләр кисешү ноктасыннан ераклыкның квадратына пропорциональ һәм квадрат почмакларында 1 гә тигез булса, пластинканың массасын табарга.

900. Әгәр һәр ноктада тыгызлык координаталар суммасының квадратына тигез булса, $x^2 + y^2 = 2az$ параболоиды һәм $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ $(z > 0)$ сферасы белән чикләнгән җисемнең массасын табарга.

XII бүлек

КӘКРЕСЫЗЫКЛЫ ИНТЕГРАЛЛАР

12.1. 1 нче төрдәге кәкресызыклы интеграл һәм аны исәпләү

$C = AB$ кәкресенең һәр M ноктасында $f(M)$ функциясе билгеләнгән булсын. Ул кәкрене ирекле рәвештә озынлыклары $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$ булган n өлешчә дугаларга бүлеп, аларның һәрберсендә берәр ирекле $M_1, M_2, \ldots, M_n$ ноктасын сайлап алабыз. Шул нокталарда функциянең кыйммәтләрен исәпләп,

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i \qquad (1)$$

суммасын төзесәк, бу сумма $f(M)$ функциясенең C кәкресе буенча *интеграль суммасы* дип атала.

Әгәр $\max\limits_{1\le i\le n} \Delta S_i \to 0$ булганда, (1) интеграль суммасының чикле чикләмәсе булса һәм ул чикләмә C кәкресен бүлү ысулыннан да, өлешчә дугаларда нокталар сайлаудан да бәйле булмаса, ул чикләмә $f(M)$ функциясенең C кәкресе буенча табылган *1 нче төрдәге кәкресызыклы интеграл* дип атала һәм $\int\limits_{AB} f(M)\,ds$ символы белән тамгалана, биредә ds — дуга дифференциалы.

Әгәр $\varphi(t)$ һәм $\psi(t)$ — өзлексез функцияләр, ә $\varphi'(t)$ һәм $\psi'(t)$ кисәкле өзлексез функцияләр $(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 > 0$ шартын канәгатьләндерсә һәм C кәкресе $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ $(t_0 \le t \le t_1)$ параметрик тигезләмәләре белән бирелгән булса, ул вакытта

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\,ds = \int\limits_{t_0}^{t_1} f\left(\varphi(t), \psi(t)\right)\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2}\,dt \qquad (2)$$

формуласы дөрес була.

Әгәр C кәкресе $y = g(x)$ $(a \le x \le b)$ тигезләмәсе белән анык рәвештә бирелгән булса, кәкресызыклы интегралны анык интегралга китерүче (2) формуласы

$$\int_{AB} f(x)ds = \int_a^b f\left(x, g(x)\right)\sqrt{1+\left(g'(x)\right)^2}dx \qquad (3)$$

рәвешен ала.

Әгәр C кәкресе поляр координаталарда $r = r(\varphi)$, $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$ тигезләмәсе белән бирелгән һәм $[\varphi_1; \varphi_2]$ кисемтәсендә $r(\varphi)$ ның өзлексез чыгарылмасы булса,

$$\int_C f(x,y)\,ds = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi\right)\sqrt{r^2+\left(r'(\varphi)\right)^2}\,d\varphi \qquad (4)$$

тигезлеге урын тота.

Әгәр пространствода C кәкресе $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ $(t_0 \le t \le t_1)$ тигезләмәләре белән бирелгән булса, бу кәкре буенча алынган беренче төрдәге кәкресызыклы интеграл анык интегралга

$$\int_C f(x,y,z)\,ds = \int_{t_0}^{t_1} f\left(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)\right)\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2+\left(\psi'(t)\right)^2+\left(\chi'(t)\right)^2}\,dt \qquad (5)$$

формуласы аша күрсәтелә.

Кайбер мәсьәләләрнең чишелешен карап үтик.

1. C кәкресе $\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}} = a^2\left(x^2-y^2\right)$ тигезләмәсе белән бирелгән булса, беренче төрдәге $\int_C \sqrt{x^2+y^2}\,ds$ интегралын исәпләргә.

Чишү. Поляр координаталарга күчәбез: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Моннан кәкренең тигезләмәсе

$$r = a^2\cos 2\varphi,\ \varphi \in \Phi = \left\{-\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4} \le \varphi \le \frac{5\pi}{4}\right\}$$

рәвешен ала. Шулай итеп,

$$\sqrt{x^2+y^2} = r = a^2\cos 2\varphi,\ \sqrt{r^2+(r')^2} = a^2\sqrt{1+3\sin^2\varphi}\,.$$

Моннан

$$\int_C \sqrt{x^2+y^2}\,ds = \int_{\varphi\in\Phi} a^2\cos 2\varphi\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\varphi =$$

$$= \int\limits_{\varphi\in\Phi} a^4 \cos 2\varphi\sqrt{1+3\sin^2 2\varphi}d\varphi =$$

$$= \frac{2a^4}{2\sqrt{3}} \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+3\sin^2 2\varphi}\, d\left(\sqrt{3}\sin 2\varphi\right) = 2a^4 + \frac{a^4}{\sqrt{3}} \ln\left(\sqrt{3}+2\right)$$ була.

2. Пространство кәкресе дугасының озынлыгын табарга: $x^2+y^2=cz$, $\frac{y}{z}=\operatorname{tg}\frac{z}{c}$, $O(0;0;0)$ ноктасыннан $A(x_0, y_0, z_0)$ ноктасына кадәр.

Чишү. Кәкрене параметрлаштырабыз. $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Шулай булгач, $\rho^2=cz$, $\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}\frac{z}{c}$, ә моннан $z=c\varphi$, $\rho^2=c^2\varphi$. Кәкренең параметрик тигезләмәсе

$$x=c\sqrt{\varphi}\cos\varphi,\ y=c\sqrt{\varphi}\sin\varphi,\ z=c\varphi\ \left(0\le\varphi\le\frac{z_0}{c}\right)$$

рәвешен ала. Дуга озынлыгын исәплибез: $ds=c\left(\sqrt{\varphi}+\frac{1}{2\sqrt{\varphi}}\right)d\varphi$, ә аннары аны 0 дән алып $\frac{z_0}{c}$ га кадәрге аралыкта интеграллап табабыз: $L=\sqrt{cz_0}\left(\frac{2z_0}{3c}+1\right)$.

КҮНЕГҮЛӘР

1 нче төрдәге кәкресызыклы интегралларны исәпләгез:

901. $\int\limits_C (x+y)\,ds$, биредә C чиге — түбәләре $O(0;\ 0)$, $A(1;\ 0)$ һәм $B(0;\ 1)$ булган өчпочмакның контуры.

902. $\int\limits_C y^2 ds$, биредә C чиге — $x=a(t-\sin t)$, $y=a(t-\cos t)$, $(0\le t\le 2\pi)$ циклоидының áркасы.

903. $\int\limits_C (x^2+y^2)\,ds$, биредә C чиге — $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$, $(0\le t\le 2\pi)$ кәкресе.

904. $\int\limits_C xy\,ds$, биредә C чиге — $x = a\,\mathrm{ch}t$, $y = a\,\mathrm{sh}t$ $(0 \le t \le t_0)$ гиперболасының дугасы.

905. $\int\limits_C \left(x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}\right) ds$, биредә C чиге — $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ астроидасының дугасы.

906. $\int\limits_C e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds$, биредә C чиге — $r = a$, $(0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4})$ әйләнәсенең өлеше, r һәм φ — поляр координаталар.

907. $\int\limits_C |y|\,ds$, биредә C чиге — $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ лемнискатасының дугасы.

908. $\int\limits_C x\,ds$, биредә C чиге — $r = a\,e^{k\varphi}$ $(k > 0)$ логарифмик спиральнең $r = a$ түгәрәге эчендәге өлеше.

909. $\int\limits_C \sqrt{x^2 + y^2}\,ds$, биредә C чиге — $x^2 + y^2 = ax$ әйләнәсе.

910. $\int\limits_C \frac{dy}{y^2}$, биредә C чиге — $a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}$ сызыгы.

Пространство кәкресе дугаларының озынлыкларын табыгыз:

911. $x = 3t$, $y = 3t^2$, $z = 2t^3$, $O\,(0; 0; 0)$ ноктасыннан $A\,(3; 3; 2)$ ноктасына кадәр.

912. $x = e^{-t}\cos t$, $y = e^{-t}\sin t$, $z = e^{-t}$, $0 < t < +\infty$ булганда.

913. $y = a\arcsin\frac{x}{a}$, $z = \frac{a}{4}\ln\frac{a-x}{a+x}$, $O\,(0;\ 0;\ 0)$ ноктасыннан $A\,(x_0, y_0, z_0)$ ноктасына кадәр.

914. $(x-y)^2 = a(x+y)$, $x^2 - y^2 = \frac{9}{8}z^2$, $O\,(0; 0; 0)$ ноктасыннан $A\,(x_0, y_0, z_0)$ ноктасына кадәр.

12.2. 2 нче төрдәге кәкресызыклы интеграл һәм аны исәпләү

$\int\limits_C P(M)\,dx$, $\int\limits_C Q(M)\,dy$ яки $\int\limits_C R(M)\,dz$ кәкресызыклы интеграллары (координаталар буенча) аналогик рәвештә C кәкресе буенча алынган $P(M)$, $Q(M)$ яки $R(M)$ интеграль суммаларының чикләмәләре кебек билгеләнәләр. Тик шундый аерма бар: бу суммаларны төзегәндә, функцияләрнең кыйммәтләре ΔS_i өлешчә дугаларының озынлыкларына түгел, ә аларның

$\Delta x_i, \Delta y_i$ яки Δz_i координаталар күчәрләренә проекцияләренә тапкырланалар.

Кәкресызыклы интегралларның суммасын яссылык очрагында $\int\limits_C P\,dx + Q\,dy$ кәкресызыклы интегралы рәвешендә, ә пространство очрагында $\int\limits_C Pdx + Qdy + Rdz$ рәвешендә билгелиләр.

Интеграллау кәкресендә юнәлешне үзгәрткәндә, кәкресызыклы интеграл үзенең тамгасын үзгәртә: $\int\limits_{\breve{AB}} = -\int\limits_{\breve{BA}}$.

Йомык яссы C сызыгы буенча әйләнүе уңай юнәлештә булганда (сәгать йөрешенә каршы), кәкресызыклы интеграл $\int\limits_C$, ә әйләнүе тискәре юнәлештә булганда $\int\limits_{C^-}$ дип тамгалана.

2 нче төрдәге кәкресызыклы интегралларны анык интегралларга китерәләр. Әгәр C шома кәкресе $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ $(t_0 \le t \le t_1)$ тигезләмәләре белән бирелгән булса,

$$\int\limits_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \\ = \int\limits_{t_0}^{t_1} \Big(P\big(\varphi(t), \psi(t)\big)\,\varphi'(t) + Q\big(\varphi(t), \psi(t)\big)\,\psi'(t)\Big)\,dt \tag{6}$$

формуласы дөрес була.

Әгәр кәкре $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$ тигезләмәсе белән бирелгән булса, (6) формуласы

$$\int\limits_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int\limits_a^b \Big(P\big(x, f(x)\big) + Q\big(x, f(x)\big)\,f'(x)\Big)\,dx \tag{7}$$

рәвешен ала.

$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ $(t_0 \le t \le t_1)$ тигезләмәсе белән бирелгән C кәкресе өчен

$$\int\limits_C P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz = \\ = \int\limits_{t_0}^{t_1} \Big[P\big(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)\big)\,\varphi'(t) + Q\big(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)\big)\,\psi'(t) + \\ + R\big(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)\big)\,\chi'(t)\Big]\,dt$$

формуласы дөрес була.

Кайбер мәсьәләләрнең чишелешен карап үтик.

3. $x = \cos t$, $y = 2\sin t$ эллипсының дугасы буенча A (1; 0) ноктасыннан алып B (0; 2) ноктасына кадәр $\int\limits_C (xy-1)\,dx + x^2y\,dy$ кәкресызыклы интегралны исәпләргә.

Чишү. Бирелгән интегралны t үзгәрешлесе буенча гади интегралга китереп исәплибез: $x = \cos t$, $dx = -\sin t\,dt$, $y = 2\sin t$, $dy = 2\cos t\,dt$. Моннан

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos t\cdot\sin t - 1)(-\sin t\,dt) + 4\cos^2 t\cdot 2\cos t\sin t\,dt =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (4\cos^3 t\sin t + \sin t - 2\sin^2 t\cos t)\,dt = \frac{4}{3}.$$

4. 1 нче мәсьәләдәге кәкресызыклы интегралны $4x + y^2 = 4$ параболасының A (1; 0) ноктасыннан алып B (0; 2) ноктасына кадәр дугасы буенча исәпләргә.

Чишү. Кәкресызыклы интегралны y үзгәрешлесе буенча гади интегралга китерәбез: $x = 1 - \frac{y^2}{4}$, $dx = -\frac{y}{2}dy$. Моннан

$$I = \int\limits_0^2 \left[\left(1-\frac{y^2}{4}\right)y - 1\right]\left(\frac{-y}{2}dy\right) + \left(1-\frac{y^2}{4}\right)^2 y\,dy =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(\frac{y^5}{16} + \frac{y^4}{8} - \frac{y^3}{2} - \frac{y^2}{2} + \frac{3y}{2}\right)dy = -\frac{17}{15}.$$

5. O (0; 0; 0) һәм B (−2; 4; 5) нокталары бирелгән. Турысызыклы OB кисемтәсе буенча $I = \int\limits_C xy^2dx + yz^2dy - zx^2dz$ кәкресызыклы интегралны исәпләргә.

Чишү. Башта интеграллау сызыгы OB турысының тигезләмәләрен төзибез. Ике нокта аша үтүче турының гомуми $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ тигезләмәсен кулланып табабыз: $\frac{x}{-2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$.

Бу тигез чагыштырмаларны t параметрына тигезләп, OB турысының каноник тигезләмәсен параметрик рәвешкә китерәбез: $x = -2t$, $y = 4t$, $z = 5t$.

Алга таба, бу тигезләмәләрне кулланып, бирелгән кәкресызыклы интегралны t үзгәрешлесе буенча гади интегралга китерәбез. Аннары аны исәплибез:

$$I = \int_0^1 -2t\,(4t^2)(-2\,dt) + 4t\,(5t)^2 4\,dt - 5t\,(-2t)^2 5\,dt = 364\int_0^1 t^3 dt = 91.$$

КҮНЕГҮЛӘР

Түбәндәге кәкресызыклы интегралларны исәпләгез:

915. $\int_{AB} (x^2 - 2xy)\,dx + (2xy + y^2)\,dy$, биредә AB чиге — $y = x^2$ параболасының A (1; 1) ноктасыннан B (2; 4) ноктасына кадәрге дугасы.

916. $\int_C (2a - y)\,dx + x\,dy$, биредә C чиге — $x = a(t - \sin t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$ циклоидаларының t параметры үсү юнәлешендә үтүче беренче а́ркасының дугасы.

917. $\int_{OA} 2xy\,dx - x^2 dy$ интегралын O (0; 0) ноктасыннан A (2; 1) ноктасына кадәр түбәндәге юллар буенча исәпләргә:

а) туры;

б) симметрия күчәре Oy булган парабола;

в) симметрия күчәре Ox булган парабола;

г) B (2; 0) булган OBA сынык сызыгы;

д) C (0; 1) булган OCA сынык сызыгы.

918. $\int_{OA} 2xy\,dx + x^2 dy$ интегралын 900 нче мәсьәлә шартлары буенча исәпләргә.

919. $\int_C \frac{(x + y)\,dx - (x - y)\,dy}{x^2 + y^2}$ интегралын $x^2 + y^2 = a^2$ әйләнәсе буенча сәгать йөрешенә каршы юнәлештә исәпләргә.

920. $\int_C y^2\,dx + x^2\,dy$, биредә C чиге — сәгатьнең уңай йөреше буенча үтүче $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ эллипсының өске яртысы.

921. $\int_{AB} \cos y dx - \sin x dy$, A ноктасының абсциссасы һәм B ноктасының ординатасы 2 гә тигез булганда, икенче координаталар чиреге биссектрисасының AB кисемтәсе буенча алынган.

Пространство кәкреләре буенча алынган кәкресызыклы интегралларны исәпләгез:

922. $\int\limits_C (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz$, биредә C кәкресе $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ параметрик тигезләмәләре белән бирелә $(0 \le t \le 2\pi)$.

923. $\int\limits_C (y\,dx + z\,dy + x\,dz)$, биредә C — параметр үсү юнәлешендә үтүче $x = R\cos\alpha\cos t$, әйләнәсе $y = R\cos\alpha\sin t$, $z = R\sin\alpha$ параметрик тигезләмәләре белән бирелгән әйләнә ($\alpha = \text{const}$).

924. $\int\limits_{OA} xy\,dx + yz\,dy + zx\,dz$, биредә OA кәкресе — xOz яссылыгының $y > 0$ ярымяссылыгындагы $x^2 + y^2 + z^2 = Rx$, $z = x$ әйләнәсенең дуга.

12.3. 2 нче төрдәге кәкресызыклы интегралны башка ысуллар белән исәпләү

$P(x, y)$ һәм $Q(x, y)$ функцияләре һәм аларның $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ аерым чыгарылмалары D өлкәсендә өзлексез булсыннар. Ул вакытта

$$\int\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \tag{8}$$

тигезлеге дөрес. Биредә кәкресызыклы интеграл D өлкәсенең Γ чиге буенча уңай юнәлештә алына. (8) формуласы *Грин формуласы* дип атала.

$P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ аңлатмасы тулы дифференциал булсын, ягъни D өлкәсендә, $du = Pdx + Qdy$ тигезлеге үтәлерлек, $u(M) = u(x, y)$ функциясе бирелсен. Ул вакытта D өлкәсендә ятучы теләсә нинди кисәкле-шома AB кәкресе өчен

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = u(B) - u(A) = \int\limits_A^B Pdx + Qdy \tag{9}$$

тигезлеге дөрес. Бу тигезлек *Ньютон-Лейбниц формуласы* дип атала.

$P(x, y)$ һәм $Q(x, y)$ функцияләре үзләренең беренче тәртиптәге аерым чыгарылмалары белән D өлкәсендә өзлексез булсыннар. Ул вакытта $Pdx + Qdy$ аңлатмасы $u(x, y)$ функциясенең тулы дифференциалы булсын өчен, D өлкәсендә

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \tag{10}$$

тигезлегенең үтәлүе кирәк һәм шул җитә дә. $u(x, y)$ функциясен аның тулы дифференциалы $Pdx + Qdy$ буенча табу ысулын күрсәтик:

$$du = Pdx + Qdy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Моннан

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y). \qquad (11)$$

Беренче тигезлекнең ике кисәген дә x буенча (яки икенчесен y буенча) интеграллап табабыз:

$$u = \int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx + \varphi(y).$$

Бу функциянең y аргументы буенча чыгарылмасын исәпләп, (10) тигезлеген һәм (11) нең икенче тигезлеген истә тотып табабыз:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P}{\partial y}dx + \varphi'(y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial Q}{\partial x}dx + \varphi'(y) =$$

$$= Q(x, y) - Q(x_0, y) + \varphi'(y) = Q(x, y).$$

Моннан $\varphi'(y) = Q(x_0, y)$. Димәк, $\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0. y)\,dy$. Шулай итеп, эзләнелә торган $u(x, y)$ функциясе

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x. y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0. y)\,dy \qquad (12)$$

формуласы буенча исәпләнә.

1 нче һәм 2 нче төрдәге кәкресызыклы интеграллар үзара

$$\int_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int_{AB} \big(P(x, y)\cos\alpha + Q(x, y)\sin\alpha\big)\,ds$$

формуласы белән бәйләнгән, биредә $\alpha = \alpha(M)$ — шома кәкренең M ноктасындагы орынмасы һәм Ox күчәренең уңай юнәлеше арасындагы почмак.

Кайбер мәсьәләләрнең чишелешен карап үтик.

6. $A(-2; -1)$, $B(3; 0)$ булганда, интеграласты аңлатмасының тулы дифференциал булганлыгын исбатларга һәм кәкресызыклы интегралны исәпләргә:

$$\int_{AB} \left(x^4 + 4xy^3\right)dx + \left(6x^2y^2 - 5y^4\right)dy.$$

Чишү. (10) шартын тикшерәбез:

$$P=x^4+4xy^3,\ \ Q=6x^2y^2-5y^4,\ \ \frac{\partial P}{\partial y}=12xy^2,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=12xy^2.$$

Шулай итеп, $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, ягъни (10) шарты үтәлде. Шулай булгач, $Pdx + Qdy$ аңлатмасы тулы дифференциал була. Тулы дифференциалы интеграл астындагы аңлатмасына тигез булган $u(x, y)$ функциясен табыйк. Аның өчен

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}=x^4+4xy^3, \\ \frac{\partial u}{\partial y}=6x^2y^2-5y^4 \end{cases} \tag{13}$$

системасын төзибез. (13) тәге беренче тигезлекне интеграллыйбыз:

$$\int\left(x^4+4xy^3\right)dx=\frac{x^5}{5}+2x^2y^3+\varphi(y).$$

Шулай булгач,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(y)+6x^2y^2=6x^2y^2-5y^4.$$

Моннан $\varphi(y)=-y^5$ һәм $u(x,y)=\frac{x^5}{5}+2x^2y^3-y^5$. (9) формуласын кулланып, эзләнелә торган интегралны табабыз:

$$\int_A^B\left(x^4+4xy^3\right)dx+\left(6x^2y^2-5y^4\right)dy=\left(\frac{x^5}{5}+2x^2y^3-y^5\right)\Bigg|_{A(-2;-1)}^{B(3;0)}=$$

$$=\frac{3^5}{5}+\frac{2^5}{5}+2\cdot 2^2-1=62.$$

7. $I=\int\limits_{AO}\left(e^x\sin y-py\right)dx+\left(e^x\cos y-p\right)dy$ кәкресызыклы интегралын исәпләргә. Биредә AO чиге — $x^2+y^2=ax$ кәкресенең югары ярымәйләнәсе, $A(a;\ 0)$, $O(0;\ 0)$.

Чишү. $P=e^x\sin y-py$, $Q=e^x\cos y-p$ тамгалауларын кертик. AO интеграллау кәкресен Ox күчәренең OA кисемтәсе белән L йомык контурына кадәр тутырабыз. Ул вакытта

$$I=\int\limits_L Pdx+Qdy-\int\limits_{OA}Pdx+Qdy.$$

$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=p$ булганлыктан, Грин формуласы буенча

$$\int_L Pdx + Qdy = \iint_D p\,dxdy,$$

биредә D өлкәсе — $\frac{a}{2}$ радиуслы түгәрәкнең югары яртысы. Шуңа күрә

$$\iint_D p\,dxdy = \frac{p\pi a^2}{8}.$$

Интегралны Ox күчәренең OA кисемтәсе буенча исәплибез. Бу кисемтәдә $P = 0$, $dy = 0$ булганны истә тотып табабыз:

$$\int_{OA} Pdx + Qdy = 0.$$

Шулай итеп,

$$I = \frac{\pi a^2}{8} p.$$

КҮНЕГҮЛӘР

Интеграласты аңлатмасының тулы дифференциал булганлыгын ачыклап, түбәндәге кәкресызыклы интегралларны исәпләгез:

925. $\int\limits_{(-1;\,2)}^{(2;\,3)} x\,dy + y\,dx.$

926. $\int\limits_{(0;\,1)}^{(3;\,-4)} x\,dx + y\,dy.$

927. $\int\limits_{(0;\,1)}^{(2;\,3)} (x+y)\,dx + (x-y)\,dy.$

928. $\int\limits_{(1;\,-1)}^{(1;\,1)} (x-y)(dx-dy).$

929. $\int\limits_{(0;\,0)}^{(a;\,b)} f(x+y)(dx+dy).$

930. $\int\limits_{(2;\,1)}^{(1;\,2)} \frac{ydx - xdy}{x^2}$, Oy күчәрен кисмәүче юллар буенча.

931. $\int\limits_{(1;\,0)}^{(6;\,8)} \frac{xdx - ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, координаталар башлангычыннан үтмәүче юллар буенча.

932. $\int\limits_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \varphi(x)dx + \psi(y)dy$, биредә φ һәм ψ — өзлексез функцияләр.

933. $\int\limits_{(-2;-1)}^{(3;0)} \left(x^4 + 4xy^3\right) dx + \left(6x^2y^2 - 5y^4\right) dy.$

934. $\int\limits_{(0,-1)}^{(1,0)} \frac{xdy - ydx}{\left(x - y\right)^2}$, $y = x$ турысын кисмәүче юллар буенча.

Түбәндәге кәкресызыклы интегралларны Грин формуласы ярдәмендә исәпләгез:

935. $\int\limits_C xy^2dy - x^2ydx$, биредә C чиге — $x^2 + y^2 = a^2$ әйләнәсе.

936. $\int\limits_C (x + y)\, dx - (x - y)\, dy$, биредә C чиге — $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипсы.

937. $\int\limits_C e^x \left[\left(1 - \cos y\right) dx - \left(y - \sin y\right) dy\right]$, биредә C чиге — $0 < x < \pi$, $0 < y < \sin x$ өлкәсен чикләүче уңай юнәлештә үтүче контур.

938. $\int\limits_{x^2+y^2=R^2} e^{-\left(x^2-y^2\right)} \left(\cos 2xy\, dx + \sin 2xy\, dy\right).$

12.4. Өслек интеграллары

Кисәкле-шома L чикле, кисәкле-шома S өслегенең нокталарында $f(M) = f(x, y, z)$ чикләнгән функциясе бирелгән булсын. Кисәкле-шома кәкреләр ярдәмендә S өслеген S_1, S_2, ..., S_n өлешләренә бүлик. Ул өлешләрнең һәркайсында ирекле M_i ноктасын сайлыйк һәм $S_n(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i$ суммасын төзик. Биредә $\Delta S_i \neq S_i$ бүленешенең i нче күзәнәгенең мәйдан зурлыгы. d — S_i күзәнәкләренең иң зур диаметры булсын. Әгәр d нульгә омтылганда, $S_n(f)$ эзлеклелеге S өслеген ваклау ысулына һәм M_i ноктасын сайлауга бәйсез I чикле чикләмәсенә омтылса, I санын S өслеге буенча $f(M)$ функциясенең беренче төрдәге *өслек интегралы* дип атыйлар һәм $I = \iint\limits_S f(x, y, z)\, ds$ дип тамгалыйлар. Өслек интегралы төшенчәсе йомык өслекләргә дә тарала.

Әгәр S шома өслек $z = z(x, y)$, биредә $(x, y) \in D$, тигезләмәсе белән бирелгән булса, биредә D — чикләнгән йомык өлкә, ә $f(x, y, z)$ S өслегендә билгеләнгән чикләнгән функция булса, ул вакытта

$$\iiint_S f(x, y, z)\,ds = \iint_D f\left(x, y, z(x, y)\right)\sqrt{1 + \left(z'_x\right)^2 + \left(z'_y\right)^2}\,dx\,dy \quad (14)$$

тигезлеге дөрес була.

(14) формуласын шулай ук

$$\iint_S f(x, y, z)\,ds = \iint_D f\left(x, y, z(x, y)\right)\frac{dx\,dy}{\cos\gamma} \quad (15)$$

рәвешендә язып була, биредә γ — n нормаленең M ноктасындагы берәмлек векторы һәм Oz күчәренең уңай юнәлеше арасындагы почмак.

$x = x(y, z)$ яки $y = y(x, z)$ тигезләмәләре белән бирелгән өслек очрагында

$$\iint_S f(x, y, z)\,ds = \iint_{D_1}\left(x(y, z), y, z\right)\frac{dy\,dz}{\cos\alpha}, \quad (16)$$

$$\iint_S f(x, y, z) = \iint_{D_2} f\left(x, y(x, z), z\right)\frac{dz\,dx}{\cos\beta} \quad (17)$$

тигезләмәләрен табабыз, биредә α һәм β — Ox һәм Oy күчәрләренең уңай юнәлешләре белән n нормаленең M ноктасындагы берәмлек векторы арасындагы почмаклар.

Әгәр $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ — өзлексез функцияләр һәм S^+ — S шома өслегенең $n(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ нормале юнәлеше белән күрсәтелгән ягы булса, 2 нче тәрдәге өслек интегралы түбәндәгечә күрсәтелә:

$$\iint_{S^+} P\,dydz + Q\,dxdz + R\,dxdy = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,ds. \quad (18)$$

Өслекнең башка S^- ягына күчкәндә, бу интегралның тамгасы капма-каршы тамгага алмашына.

Әгәр S өслек V күләмен чикләүче шома йомык өслек һәм $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ йомык V өлкәсендә 1 нче тәртиптәге аерым чыгарылмалары булган өзлексез функцияләр булса, ул вакытта *Остроградский—Гаусс формуласы* түбәндәгечә языла:

$$\iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,ds = \iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz, \quad (19)$$

биредә $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — S өслегенең тышкы нормаленең юнәлдерүче косинуслары.

Кайбер мәсьәләләрнең чишелешен карап үтик.

8. $I = \iint\limits_S \left(x^2 + y^2\right) ds$ өслек интегралын исәпләргә, биредә S — $\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 1$ җисеменең чиге.

Чишү. Интеграллау конусның ян өслеге һәм нигезе буенча башкарыла. Шуңа күрә түбәндәгечә яза алабыз:

$$I = \iint\limits_{S_1} \left(x^2 + y^2\right) ds + \iint\limits_{S_2} \left(x^2 + y^2\right) ds,$$

биредә S_1 — конусның ян өслеге, ә S_2 — аның нигезе. Конусның нигезендә мәйданның элементы $ds = dx\,dy$, шуңа күрә

$$\iint\limits_{S_2} \left(x^2 + y^2\right) ds = \iint\limits_{x_2 + y_2 \le 1} \left(x^2 + y^2\right) dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{2}.$$

Конусның ян өслегендә $ds = \sqrt{2}\,dxdy$. Моннан

$$\iint\limits_{S_1} \left(x^2 + y^2\right) ds = \sqrt{2} \cdot \iint\limits_{x_2 + y_2 \le 1} \left(x^2 + y^2\right) dxdy = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

килеп чыга.

Нәтиҗәдә $I = \frac{\pi}{2}\left(1 + \sqrt{2}\right)$.

9. 2 нче төрдәге $I = \iint\limits_S x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy$ өслек интегралын исәпләргә, биредә S — $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ сферасының тышкы ягы.

Чишү. $I_1 = \iint\limits_S z\,dxdy$ интегралын карыйк; аны сфераның S^+ һәм S^- дип тамгаланган өске һәм аскы тышкы яклары буенча интеграллар суммасы рәвешендә күрсәтеп була:

$$I_1 = \iint\limits_{S^+} z\,dxdy + \iint\limits_{S^-} z\,dxdy.$$

S^+ өслегендә $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ тигезлеге, ә S^- өслегендә $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ тигезлеге үтәлә, D — S^+ өслегенең Oxy яссылыгына проекциясе булсын. S^- өслеге Oz күчәренең уңай юнәлешендә җәенке почмак ясаучы тышкы нормаль ягыннан D га проекцияләнә. Шуңа күрә бу өслек буенча интегралны

D өлкәсе буенча икеле интегралга алмаштырганда, соңгысы алдында «–» тамгасы куела. Моннан

$$I_1 = 2\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dxdy = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

$\iint_S x\, dydz = \iint_S y\, dzdx = I_1$ тигезлекләреннән табабыз: $I = 4\pi a^3$.

10. $I = \iint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$ өслек интегралын Остроградский—Гаусс формуласы ярдәмендә исәпләргә. Биредә S — $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ сферасының тышкы ягы.

Чишү. Остроградский—Гаусс формуласын кулланып табабыз:

$$I = 3\iiint_V \left(x^2 + y^2 + z^2 \right) dxdydz,$$

биредә V — $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$ шарының күләме.

Сферик координаталарга күчсәк,

$$I = 3\int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{a} \rho^4 d\rho = \frac{12}{5}\pi a^5.$$

КҮНЕГҮЛӘР

1 нче төрдәге өслек интегралларын исәпләгез:

939. $\iint_S (x + y + z)\, ds$, биредә S — $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \ge 0$ шар өслеге.

940. $\iint_S \left(x^2 + y^2\right) ds$, биредә S — $\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 1$ җисеменең чиге.

941. $\iint_S \frac{ds}{(1 + x + y)^2}$, биредә S — $x + y + z \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$ тетраэдрының чиге.

942. $\iint_S xyz\, ds$, биредә S — $z = x^2 + y^2$ өслегенең $z = 1$ яссылыгы белән киселгән өлеше.

943. $\iint_S (xy + yz + zx)\, ds$, биредә S — $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ коник өслегенең $x^2 + y^2 = 2ax$ өслеге белән киселгән өлеше.

2 нче төрдәге өслек интегралларын исәпләгез:

944. $\iint\limits_S (x\,dydz + y\,dxdz + z\,dxdy)$, биредә S — $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ сферасының тышкы ягы.

945. $\iint\limits_S (y-z)\,dydz + (z-x)\,dxdz + (x-y)\,dxdy$, биредә S — $x^2 + y^2 = z^2\ (0 \le z \le h)$ коник өслегенең тышкы ягы.

Өслек интегралларын Остроградский—Гаусс формуласын кулланып исәпләгез:

946. $\iint\limits_S x^2dydz + y^2dxdz + z^2dxdy$, биредә S — $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$, $0 \le z \le a$ кубының тышкы ягы.

947. $\iint\limits_S x^3dydz + y^3dxdz + z^3dxdy$, биредә S — $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ сферасының тышкы ягы.

948. $\iint\limits_S \left(x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma\right)ds$, биредә S — $x^2 + y^2 = z^2$ $(0 \le z \le h)$ коник өслегенең өлеше һәм $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — бу өслекнең тышкы нормаленең юнәлдерүче косинуслары.

949. Әгәр $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ һәм S чикле V җисемен чикләүче шома өслек булса, түбәндәге формулаларның дөрес булуын исбатларга:

а) $\iint\limits_S \dfrac{\partial u}{\partial n}ds = \iiint\limits_V \Delta u\,dxdydz$;

б) $\iint\limits_S u\dfrac{\partial u}{\partial n}ds = \iiint\limits_V \left[\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]dxdydz + \iiint\limits_V u\Delta u\,dxdydz$,

биредә u функциясе — $V + S$ өлкәсендә икенче тәртипкә кадәр аерым чыгарылмалары белән өзлексез булган функция, $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ — S өслегенә тышкы нормаль буенча чыгарылма.

XIII бүлек

САНЛЫ РӘТЛӘР

13.1. Санлы рәтләрнең җыелучанлыгы

Теләсә нинди $\{u_n\}$ санлы эзлеклелеге ярдәмендә төзелгән

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (1)$$

рәвешендәге аңлатма *санлы рәт* дип атала.

$$S_1 = u_1, S_2 = u_1 + u_2 + \ldots \qquad (2)$$

чикле суммалары рәтнең *өлешчә суммалары* дип атала. Әгәр n чиксез үскәндә, (2) өлешчә суммалар эзлеклелегенең чикле чикләмәсе булса, (1) рәтен *җыелучан рәт*, ә $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ санын рәтнең *суммасы* дип атыйлар. Әгәр n чиксезлеккә омтылганда, S_n ның чикле чикләмәсе булмаса, (1) рәте *таралучан* була.

Коши критерие. Бирелгән (1) санлы рәте җыелучан булсын өчен, теләсә нинди уңай $\varepsilon > 0$ саны өчен $n > N$ булганда, $\left|S_{n+p} - S_n\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| < \varepsilon$ тигезсезлеге үтәлерлек N номеры булуы кирәк, һәм шул җитә дә (биредә p — ирекле натураль сан).

Җыелучанлыкның кирәкле билгесе. Әгәр (1) рәте җыелса, ул вакытта $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ була.

Кайбер мисалларның чишелешен карап үтик.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ рәтенең җыелучанлыгын күрсәтергә һәм суммасын табарга.

Чишү. $\frac{1}{n(n+1)}$ вакланмасын $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ рәвешендә күрсәтергә була. Ул вакытта өлешчә сумманы түбәндәгечә яза алабыз:

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}+\frac{1}{n(n+1)}=$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}.$$

Моннан $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$ Шулай булгач, бирелгән рәт җыела һәм аның суммасы 1 гә тигез.

2. $n\,\infty$ кә омтылганда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ гармоник рәтенең буыннары нульгә омтылса, аның таралучанлыгын исбатларга.

Исбатлау. $2n$ һәм n номерлы өлешчә суммаларның аермасын карап үтик:

$$S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

Бу тигезсезлектә $p=n$ булганда, гармоник рәт өчен Коши критерие үтәлми, шуңа күрә бу рәт таралучан була.

КҮНЕГҮЛӘР

Бирелгән рәтләрнең җыелучанлыгын исбатлагыз һәм аларның суммаларын табыгыз:

950. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}.$

951. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^{n-1}}.$

952. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}.$

953. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^n\cos n\alpha,\ (|q|<1).$

954. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$

955. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$

956. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)}{n(n^2-1)}.$

Коши критерием яисә санлы рәт җыелучанлыгының кирәкле билгесеннән файдаланып, түбәндәге рәтләрнең таралучанлыгын исбатлагыз:

957. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}.$

958. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+2}.$

959. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$.

960. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n^{10}}$.

961. Җыелучан рәтнең буыннарын бер үк санга тапкырласак, ул вакытта аның җыелучанлыгы үзгәрмәвен исбатларга.

962. Әгәр $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ һәм $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ рәтләре җыелса һәм аларның суммасы u һәм v булса, ул вакытта $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ рәте шулай ук җыела һәм аларның суммасы $u+v$ була. (Кире раслауның дөрес булмавына мисаллар китерегез.)

963. Рәтнең чикле сандагы буыннарын алып ташлау аның җыелучанлыгына тәэсир итми, ә аның суммасына тәэсир итә. Шуны исбатларга.

13.2. Буыннары уңай булган рәтләрнең җыелучанлык билгеләре

Чагыштыру билгесе. Әгәр ниндидер $n=n_0$ номерыннан башлап, $0\le a_n\le b_n$ булса һәм $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ рәте җыелучан булса, ул вакытта $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ рәте дә җыелучан була. Әгәр $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ рәте таралучан булса, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ рәте дә таралучан була.

Даламбер билгесе. Әгәр $a_n>0$ $(n=1,\ 2,\ \dots)$ һәм $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{a_n}=q$ булса, ул вакытта:

а) $q<1$ булганда, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ рәте җыелучан;

б) $q>1$ булганда, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ рәте таралучан була.

Коши билгесе. Әгәр $a_n\ge 0$ $(n=1,\ 2,\ \dots)$ һәм $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$ булса, ул вакытта:

а) $q<1$ булганда, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ рәте җыела;

б) $q > 1$ булганда, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ рәте тарала.

Кошиның интеграл билгесе. Әгәр $x > 0$ булганда $f(x) \geq 0$ үсмәүче функция булса, ул вакытта $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ рәте $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$ интегралы белән бер үк вакытта җыела яисә тарала.

Кайбер мисалларның чишелешен карап үтик.

3. Безгә билгеле булганча, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ — җыелучан рәт. Шуннан файдаланып, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ рәтенең дә җыелучанлыгын күрсәтергә.

Чишү. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ тигезлеге дөрес.

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)},\ n = 1, 2, \ldots$$

тигезсезлеген кулланып, чагыштыру билгесе буенча бу рәтнең җыелучан булуына төшенәбез.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$ рәтенең җыелучанлыгын күрсәтергә.

Чишү. Биредә $a_n = \frac{2n-1}{2^n}$, $a_{n+1} = \frac{2n+1}{2^{n+1}}$ һәм

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)2^n}{2^{n+1}(2n-1)} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2n}}{1-\frac{1}{2n}} = \frac{1}{2}.$$

Димәк, Даламбер билгесе буенча бирелгән рәт җыелучан була.

5. Бирелгән $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+5}{3n-1}\right)^{2n-1}$ рәтенең җыелучанлыгын тикшерергә.

Чишү. Биредә

$$a_n = \left(\frac{2n+5}{3n-1}\right)^{2n-1},\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+5}{3n-1}\right)^{2-\frac{1}{n}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 < 1.$$

Димәк, Коши билгесе буенча бирелгән рәт җыелучан була.

6. p нинди кыйммәтләр алганда, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ рәтенең җыелучан һәм кайчан таралучан булуын ачыкларга.

Чишү. $f(x)=\frac{1}{x^p}$ функциясе Кошиның интеграл билгесенең шартын канәгатьләндерсә, ул вакытта рәтнең җыелучанлыгы $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}$ интегралының җыелучанлыгы белән тәңгәл килә. Бу интегралның җыелучанлыгын тикшерәбез:

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{x^p}=\begin{cases}\lim\limits_{b\to\infty}\ln b=+\infty, & p=1 \text{ булганда,}\\ \lim\limits_{b\to\infty}\left(\frac{b^{1-p}}{1-p}-\frac{1}{1-p}\right)=+\infty, & 0<p<1 \text{ булганда,}\\ \lim\limits_{b\to\infty}\left(\frac{1}{1-p}-\frac{1}{(p-1)b^{p-1}}\right)=\frac{1}{1-p}, & p>1 \text{ булганда.}\end{cases}$$

Нәтиҗәдә $p>1$ булганда, бирелгән рәт җыела, ә $p\le 1$ булганда, рәт тарала.

КҮНЕГҮЛӘР

Чагыштыру һәм Даламбер яисә Коши билгеләрен кулланып, рәтләрнең җыелучанлыгын тикшерегез:

964. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1000^n}{n!}$.

965. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

966. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$.

967. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$.

968. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$.

969. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$.

970. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$.

971. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$.

972. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$.

973. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-1}}{\left(2n^2+n+1\right)^{\frac{n+1}{2}}}$.

974. $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{1}{\sqrt{n}}$.

975. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^2}$.

976. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

977. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n^2+1}{n^2}$.

978. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

979. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$.

980. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n\ln(\ln n)}$.

981. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2 n}$.

982. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-n}$.

983. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

13.3. Алмаш тамгалы рәтләрнең җыелучанлык билгесе

Рәтнең абсолют җыелучанлыгы. Уңай буыннары да, тискәре буыннары да чиксез күп булган

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{3}$$

рәтен һәм бу рәт белән бергә аның буыннары модульләреннән төзелгән рәтне, ягъни

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \tag{4}$$

рәтен дә карыйбыз. Әгәр (4) рәте җыелучан булса, (3) рәте дә җыелучан була.

Әгәр (4) рәте җыелучан булса, (3) рәте *абсолют җыелучан рәт* дип атала. Абсолют җыелучан рәтнең суммасы кушылучыларның тәртибенә бәйле түгел.

(3) рәтенең абсолют җыелучанлыгын ачыклау өчен, (4) рәтенә буыннары уңай булган рәтләр өчен билгеле булган җыелучанлык билгесен куллану җитә. Әгәр (3) рәте җыелучан, ә (4) рәте таралучан булса, ул вакытта (3) рәте *шартлы җыелучан рәт* дип атала.

Риман теоремасы. Шартлы җыелучан рәт буыннарының тәртибен алмаштыру юлы белән суммасы теләсә нинди санга тигез булган рәт төзергә мөмкин.

Лейбниц билгесе. Әгәр

а) $a_n \geq a_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$

б) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

шартлары үтәлсә, алмаш тамгалы $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ $(a_n \geq 0)$ рәте җыелучан була.

Бу очракта рәтнең $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$ калдыгын түбәндәгечә бәяләп була:

$$R_n = (-1)^n \theta_n a_{n+1},\ 0 \le \theta_n \le 1.$$

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ алмаш тамгалы рәтенең җыелучанлыгын тикшерергә.

Чишү. Рәт буыннарының абсолют кыйммәтләре, кими барып, нульгә омтыла:

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{6} > \frac{1}{12} > \ldots;\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 0.$$

Шуңа күрә, Лейбниц билгесе буенча, бу рәт җыелучан була. Бирелгән рәт буыннарының абсолют кыйммәтләреннән төзелгән $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ рәте интеграл билгесе буенча җыела:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(x+1)} = \lim_{\beta\to+\infty} \int_1^{\beta} \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} = \lim_{\beta\to+\infty} \ln\frac{x}{x+1}\Big|_1^{\beta} = \lim_{\beta\to+\infty} \ln\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\Big|_1^{\beta} = \ln 2.$$

Димәк, бирелгән рәт абсолют җыелучан.

КҮНЕГҮЛӘР

Рәтләрнең абсолют яки шартлы җыелучан булуын ачыклагыз:

984. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3n-1}$.

985. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$.

986. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{5n-2}$.

987. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n$.

988. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(3n-2)!!}{(2n+1)!!}$, биредә $(3n-2)!! = 1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots\cdot (3n-2)$, $(2n+1)!! = 3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots\cdot (2n+1)$.

989. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$.

990. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^2}{2^n}$.

991. $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^3}$.

992. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{(2n-1)!!}$.

993. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^{\alpha}}$.

994. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n-\ln n}$.

995. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{n^2}$.

996. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{n^2}}{n!}$.

997. $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n\ln n\sqrt{\ln\ln n}}$.

998. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{(\ln 3)^n}$.

999. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi n}{4}}{n}$.

1000. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$.

1001. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}$.

1002. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt[100]{n}}$.

1003. $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left[1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right]$.

XIV бүлек

ФУНКЦИОНАЛЬ РӘТЛӘР

14.1. Функциональ рәтнең җыелучанлык өлкәсе

D өлкәсендә $f_n(z)$ $(n \in N)$ функцияләре бирелгән булсын. Ул вакытта

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \in D \qquad (1)$$

аңлатмасы *функциональ рәт* дип атала. Әгәр D өлкәсенә керүче x_0 ноктасы өчен $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ рәте җыелса, ул вакытта (1) функциональ рәте x_0 ноктасында *җыела*, диләр. Әгәр D өлкәсенең һәрбер x ноктасында $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ санлы рәте җыелучан булса, ул вакытта (1) рәте D өлкәсендә *җыелучан* дип атала.

(1) функциональ рәтенең абсолют җыелучанлык өлкәсен ачыклау өчен, Даламбер билгесен яисә Коши билгесеннән файдаланырга кирәк.

Әгәр $\lim\limits_{n\to 0}\left|\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = f(x)$ яки $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|f_n(x)|} = f(x)$ булса, ул вакытта (1) рәтенең абсолют җыелучанлык өлкәсен ачыклау өчен, $f(x) < 1$ функциональ тигезсезлеген чишү җитә. Чик нокталарда рәтнең торышын өйрәнү өчен, килеп чыга торган өлкәләрдә өстәмә тикшерүләр таләп ителә.

Кайбер мәсьәләләрнең чишелешен карап үтик.

1. Функциональ рәтнең җыелучанлык өлкәсен табарга:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 3^n \sqrt{(x+2)^n}}, \quad x \in R, \quad x > -2.$$

Чишү. $\left|f_n(x)\right| = \dfrac{1}{n\cdot 3^n\sqrt{(x+2)^n}}$ һәм $x > -2$ булганда, Коши билгесен кулланып табабыз:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n\cdot 3^n\sqrt{(x+2)^n}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3(x+2)^{\frac{1}{2}}\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{3\sqrt{x+2}}.$$

Димәк, әгәр $\dfrac{1}{3\sqrt{x+2}} < 1$, ягъни $x > -\dfrac{17}{9}$ булса, рәт җыела. $x = -\dfrac{19}{9}$ булганда, алмаш тамгалы $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$ рәте табыла, һәм ул Лейбниц билгесе буенча җыелучан була. Шулай булгач, рәтнең җыелучанлык өлкәсе $\left[-\dfrac{17}{9};+\infty\right)$ ярыминтервал була.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}\cdot\dfrac{1}{1+a^{2n}x^2}$ функциональ рәтенең җыелучанлык өлкәсен табарга.

Чишү. Бу очракта $\dfrac{1}{n} \le \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} < \dfrac{e}{n}$ $(n = 1, 2, 3, 4, \ldots)$. Рәт җыелучан булсын өчен, $x \neq 0$ һәм $|a| \neq 1$ булуы кирәк. Чагыштыру билгесе һәм гармоник рәтнең таралучанлыгы буенча, $x = 0$ яисә $|a| = 1$ булганда, бирелгән рәт тарала.

Әгәр $x \neq 0$ һәм $|a| \neq 1$ булса, Коши билгесен кулланабыз:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\cdot\frac{1}{1+a^{2n}x^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{1+a^{2n}x^2}} = \begin{cases}\dfrac{1}{a^2}, & |a| > 1,\\ 1, & |a| < 1.\end{cases}$$

Моннан, $|a| > 1$ булганда, рәт абсолют җыелучан, ә $|a| < 1$ булганда, рәтнең җыелучанлыгы турында берни дә әйтә алмыйбыз.

$|a| < 1$ булганда, чагыштыру билгесе буенча, тикшерелгән рәт таралучан була. Шулай булгач, әгәр $|a| > 1$ һәм $x \neq 0$ булса, рәт абсолют җыелучан була.

КҮНЕГҮЛӘР

Функциональ рәтләрнең җыелучанлык өлкәләрен табыгыз:

1004. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{x^n}$.

1005. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n-1}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^n$.

1006. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n.$

1007. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^n.$

1008. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 3^{2n}}{2^n}x^n(1-x)^n.$

1009. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\sin^n x}{n^2}.$

1010. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^n}.$

1011. $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{x(x+n)}{n}\right]^n.$

1012. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}.$

1013. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^n)}.$

1014. $\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}.$

1015. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\frac{1}{1+a^{2n}x^2}.$

1016. $\sum_{n=1}^{\infty}(2-x)\left(2-x^{\frac{1}{2}}\right)\left(2-x^{\frac{1}{3}}\right)\ldots\left(2-x^{\frac{1}{n}}\right)\quad(x>0).$

1017. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}.$

14.2. Функциональ рәтләрнең тигез җыелучанлыгы

Әгәр $(a,\ b)$ интервалында түбәндәге шартлар үтәлсә:

а) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x),\ (a<x<b)$ булса,

б) теләсә нинди уңай ε саны өчен $n>N$ булганда, барлык $x\in(a,\ b)$ өчен $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ тигезсезлеге үтәлерлек $N=N(\varepsilon)$ саны табылса, $f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots$ функцияләре эзлеклелеге бу интервалда *тигез җыелучан* дип атала. Бу очракта $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$ дип язалар.

Әгәр $(a,\ b)$ интервалында өлешчә суммалар эзлеклелеге $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}f_k(x)\quad(n=1,2,\ldots)$ тигез җыелса, ул вакытта

$$\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)\tag{2}$$

функциональ рәте бу интервалда *тигез җыелучан* дип атала.

Коши критерие. Бирелгән $(a,\ b)$ интервалында (2) рәте тигез җыелучан булсын өчен, теләсә нинди уңай ε саны өчен $n>N$ һәм $p>0$ булганда, $(a,\ b)$ интервалының барлык нокталарында $\left|S_{n+p}(x)-S_n(x)\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}f_k(x)\right|<\varepsilon$ тигезсезлеге үтәлерлек $N=N(E)$ номеры табылуы кирәк, һәм шул җитә дә.

Вейерштрасс билгесе. Әгәр $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ санлы рәте җыелучан булса һәм $\forall x \in (a, b)$ өчен $|f_n(x)| \le C_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ тигезсезлеге үтәлсә, (2) рәте (a, b) интервалында *абсолют* һәм *тигез җыелучан* була.

14.3. Тигез җыелучан рәтләрнең үзлекләре

1) Өзлексез функцияләрнең тигез җыелучан рәтенең суммасы өзлексез функция була.

2) Әгәр (2) функциональ рәте (a, b) интервалында тигез җыелучан һәм $\lim_{x \to a} f_n(x) = A_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ чикле чикләмәсе булса, ул вакытта $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ рәте дә җыелучан һәм $\lim_{x \to a}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to a} f_n(x)$ тигезлеге дөрес була.

3) Әгәр (2) җыелучан рәтенең буыннары $a < x < b$ тигезсезлеге үтәлгәндә дифференциалланучы һәм чыгарылмалар рәте $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ (a, b) интервалында тигез җыелучан булса, ул вакытта

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right]' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

4) Әгәр (a, b) чикле интервалында (2) рәтенең буыннары өзлексез һәм ул рәт тигез җыелучан булса, ул вакытта

$$\int_a^b\left\{\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right\}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx.$$

3. Вейерштрасс билгесен кулланып, рәтнең тигез җыелучанлыгын күрсәтергә:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^5x^2},\ |x| < +\infty.$$

Чишү. $\sup_{|x|<\infty}|f_n(x)|$ югарыгы чиген табабыз. Биредә $f_n(x)$ — рәтнең гомуми буыны.

$x = \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$ булганда, $\sup_{|x|<+\infty}|f_n(x)| = \sup_{|x|<+\infty}\left|\frac{nx}{1+n^5x^2}\right| = \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$ була. Димәк, бирелгән рәт өчен $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$ рәте мажорант була. Мажорант

рәт җыелучан булганлыктан, Вейерштрасс билгесе буенча, рәт тигез җыелучан була.

4. $1 \le x \le 1$ сегментында җыелучан $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ рәтенең характерын тикшерергә.

Чишү. n ∞ кә омтылганда, рәтнең калдыгы

$$\left|S(x) - S_n(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}\right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \to 0$$

дип бәяләп була. Биредә $S(x)$ һәм $S_n(x)$ — бирелгән җыелучан рәтнең суммасы һәм өлешчә суммасы $\left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$.

Чагыштыру билгесе негезендә бирелгән рәтне тигез җыелучан рәт дип әйтеп була.

КҮНЕГҮЛӘР

Вейерштрасс билгесен кулланып, бирелгән функциональ рәтләрнең күрсәтелгән аралыкта тигез җыелучанлыгын тикшерегез:

1018. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}, \ -\infty < x < +\infty.$

1019. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+2^n}, \ -2 < x < +\infty.$

1020. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}, \ 0 < x < +\infty.$

1021. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}, \ |x| < +\infty.$

1022. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + x^{-n}), \ \frac{1}{2} \le |x| \le 2.$

1023. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\left(\frac{n}{2}\right)!}, \ |x| < a, \ a \in R.$

1024. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{x^4+n^4}}, \ |x| < +\infty.$

1025. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, \ |x| < +\infty.$

1026. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}, \ |x| < +\infty.$

1027. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{x}{n\ln^2 n}\right), \ |x| < a.$

1028. $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}, \ 0 \le x < +\infty.$

1029. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+n^2}, |x| < +\infty.$

Күрсәтелгән рәтләрнең тигез җыелучанлык өлкәсен табыгыз:

1030. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^{-x}$.

1031. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(x+2)^n}$.

1032. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$.

1033. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}$.

14.4. Дәрәҗәле рәтләр

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-x_0)^n \qquad (3)$$

рәвешендәге рәт, $(x - x_0)$ нең дәрәҗәләре буенча — *дәрәҗәле рәт*, ә

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \qquad (4)$$

рәте xның дәрәҗәләре буенча *дәрәҗәле рәт* дип атала. (3) рәтендә $(x - x_0) = \xi$ дип алыштырсак, бу рәт (4) рәтенә китерелә.

Лемма. Әгәр (4) рәте нульдән аермалы булган $x=\bar{x}$ кыйммәтендә җыелса, ул $|x|<|\bar{x}|$ тигезсезлеген канәгатьләндерүче барлык кыйммәтләрдә дә *абсолют җыелучан* була.

Бу леммадан күренгәнчә, дәрәҗәле рәтнең җыелучанлык өлкәсе $|x|<R$ интервалы була. Бу интервал эчендә рәт җыела, ә интервал тышында тарала. Биредә R саны дәрәҗәле рәтнең *җыелучанлык радиусы* дип атала. Дәрәҗәле рәтнең җыелучанлык радиусы Rны Коши формуласын кулланып табарга була:

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}, \qquad (5)$$

яки

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \qquad (6)$$

Дәрәҗәле рәтнең чик нокталарда җыелучанлыгын ачыклау өчен, санлы рәтнең җыелучанлыгы турындагы билгедән файдаланырга мөмкин.

Түбәндәге дәрәҗәле рәтләрнең җыелучанлык радиусын һәм интервалын билгеләгез, ул рәтнең чик нокталарда җыелучан булуын тикшерегез:

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n}(x+1)^n.$

Чишү. Коши формуласы буенча,

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\frac{3^n + (-2)^n}{n}\right|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[2k]{\frac{9^k + 4^k}{2k}} = 3 \quad (n = 2k).$$

Шуңа күрә $-\frac{4}{3} < x < -\frac{2}{3}$ аралыгында рәт абсолют җыела.

Әйтик, $x = -\frac{4}{3}$ булсын. Бу очракта

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \cdot \frac{(-1)^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

рәте, ике җыелучан рәтнең суммасына тигез булганлыктан, җыелучан була.

Хәзер $x = -\frac{2}{3}$ булсын. Ул вакытта $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n \cdot 3^n}$ санлы рәте чагыштыру билгесе буенча таралучан. Моннан $x = -\frac{4}{3}$ ноктасында дәрәҗәле рәт — бары шартлы җыелучан, ә $x = -\frac{2}{3}$ булганда таралучан була.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} x^n \quad (a > 1).$

(6) формуласы нигезендә җыелучанлык радиусын табабыз:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, a^{(n+1)^2}}{a^{n^2}(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{2n+1}}{(n+1)} = +\infty.$$

Моннан дәрәҗәле рәт барлык санлы күчәрдә җыела.

КҮНЕГҮЛӘР

Дәрәҗәле рәтләрнең җыелучанлык радиусын һәм интервалын билгеләгез. Ул рәтләрнең чик нокталарда җыелучан булуын тикшерегез:

1034. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}.$ **1035.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n}(x+1)^n.$

1036. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$.

1037. $\sum_{n=1}^{\infty} a^{n^2} x^n \quad (0 < a < 1)$.

1037. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$.

1039. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} x^n \quad (a > 1)$.

1040. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p \left(\frac{x-1}{2}\right)^n$.

1041. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}\right]^p x^n$.

1042. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n$.

1043. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}\right) x^n \quad (a > 0,$ $b > 0)$.

1044. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n} \quad (a > 0, b > 0)$.

1045. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^{\sqrt{n}}} \quad (a > 0)$.

1046. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-\sqrt{n}} x^n}{\sqrt{n^2+1}}$.

1047. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^n$.

1048. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n x^n$.

14.5. Функцияләрне Тейлор рәтенә таркату

Әгәр a ноктасының нииндидер $|x-a| < R$ тирәлегендә $f(x)$ функциясен $x-a$ дәрәҗәләре буенча дәрәҗәле рәткә таркатып булса, ул рәт *Тейлор рәте* дип атала һәм түбәндәгечә тамгалана:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots \quad (7)$$

Тейлор рәте, $a = 0$ булганда, *Маклорен рәте* дип атала.

Бик күп мәсьәләләрне чишкәндә, элементар функцияләрнең түбәндәге таркатмаларын кулланырга тәкъдим ителә:

1) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (|x| < \infty)$;

2) $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (|x| < \infty)$;

3) $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad (|x| < \infty)$;

4) $(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n \quad (-1<x<1);$

5) $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad (-1 < x < 1).$

Түбәндәге функцияләрне xның дәрәҗәләре буенча таркатып языгыз һәм җыелучанлык интервалын табыгыз:

7. $f(x) = \sin(m \arcsin x)$.

Чишү. $f(x)$ ны дифференциаллап, табылган аңлатманың ике ягын да квадратка күтәрсәк, килеп чыккан аңлатманы тагын бер кат дифференциаллап табабыз:

$$(1-x^2)f'' - xf' + m^2 f = 0.$$

Лейбниц формуласыннан файдаланып, бердәйлекне $(n-2)$ тапкыр дифференциаллап табабыз:

$$(1-x^2)f^{(n)} - 2x(n-2)f^{n-1} -$$

$$-(n-2)(n-3)f^{(n-2)} - xf^{(n-1)} - (n-2)f^{(n-2)} + m^2 f^{(n-2)} = 0.$$

$x = 0$ булганда,

$$f^{(n)}(0) = [(n-2)^2 - m^2]\, f^{(n-2)}(0)$$

килеп чыга.

$f(0) = 0,\ f'(0) = m,\ f^{(2k)}(0) = 0,$

$f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k m(m^2 - 1^2)(m^2 - 3^2)\dots(m^2 - (2k-1)^2),$

$(k = 1, 2, \dots).$

Шулай булгач,

$$\sin(m \arcsin x) = mx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^k m(m^2-1)\dots[m^2-(2k-1)^2]}{(2k+1)!} x^{2k+1} =$$

$$= mx + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m(1^2-m^2)\dots[(2k-1)^2-m^2]}{(2k+1)!} x^{2k+1}. \qquad (8)$$

(8) нең җыелучанлык интервалын һәм радиусын табабыз:

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(2k+1)(2k+3)}{(2k+1)^2 - m^2} \right| = 1,\ |x| < 1 \ (k \in Z).$$

8. $f(x) = \operatorname{ch} x$.

Чишү. e^x функциясенең таркатмасын кулланып табабыз:

$$ch\, x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n!} + (-1)^n \frac{x^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

(6) формуласы буенча, җыелучанлык интервалын эзлибез:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)!}{(2n)!} = \lim_{n\to\infty}(2n+1)(2n+2) = +\infty.$$

Шулай булгач, барлык $x \in (-\infty; +\infty)$ өчен табылган таркатма дөрес була.

9. $f(x) = \dfrac{3}{(1-x)(1+2x)}$.

Чишү. Функцияләрне гади вакланмаларга таркатып табыбыз:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{2}{1+2x}.$$

Элементар функцияләрнең таркатмасы

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \tag{9}$$

һәм

$$\frac{1}{1+2x} = 1 - 2x + (2x)^2 - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n x^n. \tag{10}$$

Димәк,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[1 + (-1)^n 2^{n+1}\right] x^n. \tag{11}$$

$|x| < 1$ һәм $|x| < \dfrac{1}{2}$ булганда, (9) һәм (10) геометрик прогрессияләре җыела. Моннан, $|x| < \dfrac{1}{2}$ булганда, (11) формуласы дөрес була.

КҮНЕГҮЛӘР

***x* ның дәрәҗәләре буенча функцияләрнең таркатмасын языгыз һәм таркатмаларның җыелучанлык интервалын табыгыз:**

1049. $f(x) = \operatorname{sh} x$.
1050. $f(x) = \operatorname{ch} x$.
1051. $f(x) = \sin^2 x$.
1052. $f(x) = a^x$.
1053. $f(x) = \sin(\mu \arcsin x)$.

x ның дәрәҗәләре буенча функцияләрнең дәрәҗәле рәткә таркатмаларын языгыз:

1054. $f(x) = e^{-x^2}$.

1055. $f(x) = \cos^2 x$.

1056. $f(x) = \sin^3 x$.

1057. $f(x) = \dfrac{x^{10}}{1-x}$.

1058. $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

1059. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$.

1060. $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

1061. $f(x) = \dfrac{x}{1+x-2x^2}$.

1062. $f(x) = \dfrac{12-5x}{6-5x-x^2}$.

1063. $f(x) = \dfrac{x}{(1-x)(1-x^2)}$.

Төрле методлар кулланып, түбәндәге функцияләрне дәрәҗәле рәткә таркатыгыз:

1064. $f(x) = (1+x)\ln(1+x)$.

1065. $f(x) = \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x} + \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x$.

1066. $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{2-2x}{1+4x}$.

1067. $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{2x}{2-x^2}$.

1068. $f(x) = \operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1+x^2}$.

XV бүлек

ФУРЬЕ РӘТЕ

15.1. Функцияләрне $(-\pi; \pi)$ интервалында Фурье рәтенә таркату

$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots$ тригонометрик функцияләр системасы $[-\pi; \pi]$ кисемтәсендә ортогональ була, ягъни ике функциянең бу кисемтәдә тапкырчыгышының интегралы нульгә тигез була.

Әгәр $f(x) \in L\ [-\pi; \pi]\ \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx < +\infty$ булса, ул вакытта

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx,\quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

саннары була. Бу саннар $f(x)$ функциясенең *Фурье коэффициентлары* дип атала.

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{1}$$

рәте $f(x)$ функциясенең *Фурье рәте* дип атала.

Әгәр $f(x)$ функциясе җөп (ягъни $f(-x) = - f(x)$) булса, ул вакытта (1) формуласында $b_n = 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ һәм

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx\ (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Әгәр $f(x)$ функциясе так (ягъни $f(-x) = - f(x)$) булса, ул вакытта $a_n = 0$ $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ һәм

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx\ (n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

$(0; \pi)$ интервалында бирелгән функция $(-\pi; 0)$ интервалына җөп яисә так итеп дәвам итәлергә мөмкин. Моннан аны

$(0; \pi)$ интервалында синуслар яисә косинуслар буенча Фурье рәтенә таркатырга мөмкин.

Д и р и х л е   б и л г е с е. Периоды 2π булган функция $[-\pi; \pi]$ кисемтәсендә кисәкчә монотон һәм ул функциянең өзелү нокталары чикле санда булса, Фурье рәте һәр өзлексез ноктада $f(x_0)$ функциясенә, ә һәр өзелү ноктасында $\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$ суммасына җыела.

Кайбер мәсьәләләрнең чишелешен карап үтик.

1. Түбәндәге функцияне $(-\pi; \pi)$ интервалында Фурье рәтенә таркатырга:

$$f(x) = |x|.$$

Чишү. Бу функция $[-\pi; \pi]$ интервалында өзлексез була. $f(x)$ функциясе җөп булганлыктан, $b_n = 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right),\ a_0 = \pi.$$

Моннан

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} \quad (-\pi < x < \pi).$$

2. $f(x) = \operatorname{sign} x$ $(-\pi < x < \pi)$ функциясен Фурье рәтенә таркатырга һәм, бу таркатуны кулланып, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ рәтенең суммасын табарга.

Чишү. Бу функция так булганлыктан, $a_n = 0$ $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$,

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\operatorname{sign} x \sin nx\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi n}(1 - \cos n\pi) = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi(2m-1)}, & n = 2m-1 \text{ булганда}, \\ 0, & n = 2m \text{ булганда}. \end{cases}$$

Шулай булгач, $\operatorname{sign} x = \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin(2m-1)x}{2m-1}$. $x = \frac{\pi}{2}$ булганда табабыз:

$$1 = \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{2m-1}, \text{ яисә } \frac{\pi}{4} = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{2m-1}.$$

КҮНЕГҮЛӘР

Күрсәтелгән функцияләрне $(-\pi; \pi)$ интервалында Фурье рәтенә таркатыгыз һәм өзелү ноктасында рәтнең суммасын табыгыз:

1069. $f(x)=\begin{cases} c_1, & -\pi<x\le 0 \text{ булганда}, \\ c_2, & 0<x<\pi \text{ булганда}. \end{cases}$

1070. $f(x)=\begin{cases} ax, & -\pi<x\le 0 \text{ булганда}, \\ bx, & 0<x<\pi \text{ булганда}. \end{cases}$

1071. $f(x)=x^2$.

1072. $f(x)=e^{ax}$.

1073. $f(x)=\sin ax$.

1074. $f(x)=\cos ax$.

1075. $f(x)=\operatorname{sh} ax$.

1076. $f(x)=\operatorname{ch} ax$.

Функцияләрне $(-\pi; \pi)$ интервалында синуслар һәм косинуслар буенча Фурье рәтенә таркатыгыз:

1077. $f(x)=x$.

1078. $f(x)=x^2$.

1079. $f(x)=e^{ax}$.

1080. $f(x)=\begin{cases} 1, & 0<x<\dfrac{\pi}{2} \text{ булганда}, \\ 0, & \dfrac{\pi}{2}\le x<\pi \text{ булганда}. \end{cases}$

1081. $f(x)=\begin{cases} x, & 0<x\le\dfrac{\pi}{2} \text{ булганда}, \\ \pi-x, & \dfrac{\pi}{2}<x<\pi \text{ булганда}. \end{cases}$

15.2. Функцияне $(-l; l)$ интервалында Фурье рәтенә таркату

$$1,\ \cos\frac{\pi x}{l},\ \sin\frac{\pi x}{l},\ \ldots,\ \cos\frac{k\pi x}{l},\ \sin\frac{k\pi x}{l} \qquad (2)$$

функцияләр системасы $[-l; l]$ кисемтәсендә ортогональ, $f(x)$ функциясе $[-l; l]$ кисемтәсендә интегралланучы функция булсын.

$$a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx,\ \ b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx \qquad (3)$$

саннары $f(x)$ функциясенең (2) функцияләренең ортогональ системасы буенча *Фурье коэффициентлары* дип атала.

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right)$$

рәте $f(x)$ функциясенең *Фурье рәте* дип атала.

Әгәр $f(x)$ функциясе *җөп* булса, ул вакытта аның Фурье рәте

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{k\pi x}{l}$$

рәвешендә була.

Әгәр функция *так* булса, Фурье рәте

$$S(x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin\frac{k\pi x}{l}$$

рәвешен ала. $f(x)$ функциясенең өзелү нокталарында һәм $x=\pm l$ очларында Фурье рәтенең суммасы $(-\pi;\ \pi)$ интервалындагы таркатмасындагыча табыла.

$(0;\ l)$ интервалында бирелгән функцияне так яки җөп формада $(-l;\ 0)$ интервалына дәвам итәргә мөмкин, һәм ул синуслар яки косинуслар буенча Фурье рәтенә таркала.

3. Периоды $2l=2$ булган $f(x)$ периодик функциясен $[-1;\ 1]$ кисемтәсендә Фурье рәтенә таркатырга:

$$f(x)=|x|=\begin{cases}-x, & -1\le x<0 \text{ булганда},\\ x, & 0\le x\le 1 \text{ булганда}.\end{cases}$$

Чишү. Бирелгән функция — җөп функция. Ул косинуслар буенча Фурье рәтенә таркатыла. Функциянең җөп булганлыгын истә тотып, (3) формуласы буенча табабыз:

$$a_0=2\int_0^1 x\,dx=2\left[\frac{x^2}{2}\right]\Big|_0^1=1,$$

$$a_n=\int_0^1 x\cos n\pi x\,dx=2\left[\frac{x\sin n\pi x}{\pi n}+\frac{\cos n\pi x}{n^2\pi^2}\right]\Big|_0^1=$$

$$=\frac{2}{n^2\pi^2}\big(\cos(\pi n-1)\big)=2\,\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2}.$$

Димәк, $$a_n=\begin{cases}0, & n=2m \text{ булганда},\\ -\dfrac{4}{(2m+1)^2\pi^2}, & n=2m+1 \text{ булганда}.\end{cases}$$

Димәк, бирелгән функция өчен Фурье рәте

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos(2m+1)\pi x}{(2m+1)^2}$$

рәвешен ала.

КҮНЕГҮЛӘР

Функцияне күрсәтелгән интервалларда Фурье рәтенә таркатыгыз:

1082. $f(x) = |x|, -1 < x < 1.$
1083. $f(x) = 2x, 0 < x < 1.$
1084. $f(x) = e^x, -l < x < l.$
1085. $f(x) = 10 - x, 5 < x < 15.$

Функцияләрне күрсәтелгән интервалларда синуслар һәм косинуслар буенча Фурье рәтенә таркатыгыз:

1086. $f(x) = 1, 0 < x < 1.$
1087. $f(x) = x, 0 < x < l.$

Җаваплар

II бүлек

5. R. **6.** $]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[$. **7.** *R*. **8.** $t\in[2; 3]$. **9.** $x\in Z$. **10.** $t\in[3; 4]$, $]3-2\pi; 3-\pi[$. **11.** $t\in[1; 4]$. **12.** $x>0$, $x\notin k$, $k=1, 2, \ldots$. **13.** $x\in[4k^2\pi^2; (2k+1)^2\pi^2]$, $k\in Z_0$. **14.** *R*. **15.** $]-\infty; 0[\cup\cup]0; 1[$. **16.** *R*. **17.** $]-\infty; 0[$. **18.** Мәгънәсе юк. **19.** $]\frac{1}{2}; \infty[$. **20.** Мәгънәсе юк. **21.** *R*. **22.** $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$. **23.** $x>0$. **24.** $x\neq\pm\frac{3}{2}$. **25.** $\{0\}$. **26.** $\{0\}\cup[2; +\infty]$. **27.** $]-1; 0[\cup]1; 2[\cup[2; +\infty]$. **28.** $]3-2\pi; 3-\pi[\cup]3; 4]$. **29.** $[-4; \pi]\cup[0; \pi]$. **30.** $[4; 6]$. **31.** $]2; 3[$. **32.** $[-1; 2]$. **33.** $]-2; 0]$. **34.** $]-\infty; -1]\cup[0; 1]$. **35.** $[1; 100]$. **36.** $[k\pi; k\pi+\frac{\pi}{2}]$, $k=0\ \pm1\ \pm2\ \ldots$. **64.** Юк. **65.** 1. **66.** 2. **67.** 6π. **68.** 2. **69.** $\frac{\pi}{2}$. **70.** 2π. **71.** Юк. **72.** Юк. **73.** π. **74.** 2π. **75.** 2π. **76.** π. **77.** $\frac{\pi}{2}$ **78.** 2π. **79.** 2π. **80.** π. **81.** 2π. **82.** Юк. **83.** Юк.

III бүлек

84. $x_n=\frac{n+1}{n}$. **85.** $x_n=2+(-1)^n$. **86.** $x_n=3+2^n$. **87.** $x_n=n!$ **88.** $x_n=\frac{n}{2^n}$. **104.** 5. **105.** 0,6. **106.** $\frac{1}{3}$. **107.** -1. **108.** 1. **109.** 0. **110.** 1. **111.** $-\frac{1}{6}$. **112.** -1. **113.** 0. **114.** 27. **115.** $-\frac{15}{2}$. **116.** $-\frac{1}{2}$. **117.** $\frac{1}{2}$. **118.** $\frac{3}{4(1-a)}$, $|a|<1$ өчен; әгәр $|a|\geq1$ булса, эзлеклелек тарала.

IV бүлек

125. $y=x$. **126.** $y=x+1$, $y=-x-1$. **127.** $y=x-\pi$. **128.** $y=0$. **129.** $y=2x$, $x=0$. **130.** $y=-3x$, $x=0$. **131.** $y=x-6$. **132.** $x=-\frac{3}{2}$. **133.** $y=1$, $x=-1$. **134.** $x=-1$, $x=2$. **135.** $y=x+2$, $x=1$. **136.** $x=1$. **137.** $-\frac{1}{6}$. **138.** $-\frac{1}{5}$. **139.** 1. **140.** 2. **141.** $\frac{1}{4}$. **142.** $\frac{1}{4}$. **143.** $\frac{3}{5}$. **144.** $\frac{1}{6}$. **145.** 0. **146.** 0. **147.** $\frac{4}{3}$. **148.** $\frac{1}{2}$. **149.** 1. **150.** *m*. **151.** $\frac{k}{n}$.

152. $a^a \ln ae$. **153.** $\frac{\alpha}{\beta}a^{\alpha-\beta}$. **154.** $\frac{1}{3}$. **155.** $\frac{m}{n}$. **156.** $\frac{1}{64}$. **157.** $\frac{2}{5}$. **158.** 0. **159.** $\frac{2}{\pi}$. **160.** $\frac{\pi}{2}$. **161.** -4. **162.** $-\frac{a}{\pi}$. **163.** -2. **164.** $\frac{1}{8}$. **165.** $\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}$. **166.** 3. **167.** $\frac{\sin 2\beta}{2\beta}$. **168.** 1. **169.** $-\sin a$. **170.** $\frac{2\sin a}{\cos^3 a}$. **171.** $\frac{\sqrt{2}}{8}$. **172.** $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. **173.** e^a. **174.** $\frac{1}{e}$. **175.** e^{mn}. **176.** e^{-10}. **177.** e^2. **178.** e^{-1}. **179.** e^3. **180.** 0. **181.** 0. **182.** Юк. **183.** e. **184.** n. **185.** $\ln 3$. **186.** 5. **187.** 10. **188.** e^8. **189.** $\frac{1}{\sqrt{e}}$. **190.** $\frac{1}{\sqrt{e}}$. **191.** $\frac{1}{e}$. **192.** $\frac{2}{3}$. **193.** $\sqrt{e}$. **194.** $\frac{3}{2}$. **195.** e^{18}. **196.** $e^{\frac{1}{e}}$. **197.** 2. **198.** ∞. **199.** $\frac{1}{2}$. **200.** $\frac{1}{2}$. **201.** $\frac{1}{2}$. **202.** 0. **203.** 0. **204.** $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. **205.** e^{-4}. **206.** 0. **207.** $\frac{3}{2}$. **208.** e^{-1}. **209.** $\frac{1}{e}$. **210.** $\frac{1}{2}$. **211.** $\sqrt{ab}$. **212.** $\frac{\alpha}{\beta}$. **213.** -1. **214.** -1. **215.** -1. **216.** 1. **217.** $-\infty$. **218.** $-\infty$. **219.** $-\infty$. **220.** 1. **221.** 0.

V бүлек

232. 1. **233.** $x = 0$. **234.** Юк. **235.** $x = 0$ (II төр) . **236.** $x = 2$ (II төр). **237.** $x = -1$ (II төр). **238.** $x = 0$ (II төр). **239.** $x = 2$ (чикләнгән өзелү). **240.** $x = -3$, $x = 0$ (II төр). **241.** I төр. **242.** $x = -3$, $x = 2$ (II төр). **243.** $x = -1$, $f(-1) = \frac{1}{3}$ (чикләнмәсе була). **244.** $x = 1$, $f(1) = -\frac{1}{4}$ (чикләнмәсе була). **245.** $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$; (II төр). **246.** $x = 0$ (II төр). **247.** $x = \frac{1}{y}$. **248.** $x = \lg \frac{y}{10}$. **249.** $x = \log_3 \frac{y}{1-y}$. **250.** $x = \frac{-dy+b}{cy-a}$. **251.** $x = \frac{1}{3}\arcsin\frac{y}{2}$.

VI бүлек

252. $6x - 4$. **253.** $-\frac{1}{x^2}$. **254.** $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. **255.** $3\cos 3x$. **256.** $y'(0) = 3$. **257.** $-a\sin(ax+b)$. **258.** $y'(1) = 5$. **259.** $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$. **260.** $-\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$. **261.** $2^{x^2} 2x \ln 2$. **262.** $6x^2 - 10x + 7$. **263.** $y'(1) = -4$. **264.** $y'(a) =$

$= 3a^2 - 4a$. **265.** $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. **266.** $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$. **267.** $\frac{1}{n} - \frac{n}{t^2} + \frac{2t}{m^2} - \frac{2m^2}{t^3}$.

268. $\frac{2mx + n}{a+b}$. **269.** $\frac{2ax}{a+b} + \frac{b}{a+b} - \frac{c}{(a+b)x^2}$. **270.** $f'(u) = 2,5$.

271. $f'(-1) = 8$. **272.** $5(a+b)t^4$. **273.** $mnt^{n-1} + mnt^{m-1}$. **274.** $\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} + x^9$. **275.** $2t(2t^2 - 1)$. **276.** $4t(10t^3 + 3t - 5)$. **277.** $2t(-20t^3 + 3t - 4)$. **278.** $-18x^5 + 10x^4 - 12x^3 + 15x^2 - 4x + 3$. **279.** $-\frac{1}{2\sqrt{t}}\left(1 + \frac{1}{t}\right)$.

280. $-\frac{2}{(t-1)^2}$. **281.** $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$. **282.** $\frac{ad - bc}{(cx+d)^2}$. **283.** $-\frac{6x^2}{(1+x^3)^2}$.

284. $\frac{2x^4(x^3-5)}{(x^3-2)^2}$. **285.** $-\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$. **286.** $\frac{3-2x}{(x^2-3x+6)^2}$.

287. $\frac{1+2t+3t^2-2t^3-t^4}{(1+t^3)^2}$. **288.** $\frac{6u(1+3u-5u^3)}{(1-u^2)^2(1-2u^3)^2}$. **289.** $-\frac{1}{4}$. **290.** $\frac{17}{15}$.

291. 1. **292.** $10x(x^2+1)^4$. **293.** $-20t(1-t^2)^9$. **294.** $\frac{-4(t+1)}{(t-1)^3}$.

295. $\frac{5(x^2+2x-1)(1+x^2)^4}{(1+x)^6}$. **296.** $2nx(x^2+1)^{n-1}$. **297.** $15(1+3x)^4$.

298. $\frac{2b}{\sqrt{x}}\left(a + b\sqrt{x}\right)^3$. **299.** $-\frac{2\sqrt{x}+1}{6\sqrt{x}(x+\sqrt{x})\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}}$. **300.** $\frac{4x+1}{3\sqrt[3]{(2x^2+x-1)^2}}$.

301. $\frac{3-x}{2\sqrt{(1-x)^3}}$. **302.** $\frac{x(x^2+2a^2)}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}$. **303.** $x^2\sin x + \sin x - x\cos x$. **304.** $\operatorname{tg}x + \frac{x}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}$. **305.** $3\cos 3x$. **306.** $\sin(x^2+1) + 2x^2\cos(x^2+1)$ **307.** $\sin 2x$.

308. $\frac{\sin x + \cos x + x(\sin x - \cos x)}{1 + \sin 2x}$. **309.** $\frac{(1+\operatorname{tg}x)(\sin x + x\cos x)}{(1+\operatorname{tg}x)^2} - \frac{x\sin x\sec^2 x}{(1+\operatorname{tg}x)^2}$. **310.** $\frac{3}{2}\sin 2x(2 - \sin x)$. **311.** $\frac{-b}{3}\sin\frac{t}{3}$. **312.** $9\cos(3t + 5)$. **313.** $-\frac{\cos\frac{1}{t}}{t^2}$. **314.** $-12\cos^2 4t\sin 4t$. **315.** $-3\sin 3t\sin(2\cos 3t)$.

316. $\frac{\sin t\ (1 + \cos^2 t)}{\cos^2 t}$. **317.** $\frac{\sin 2t\cos t^2 + 2t\sin t^2 + 2t\sin^2 t\sin t^2}{\cos^2 t^2}$.

318. $\frac{4\cos 2x}{(1-\sin 2x)^2}$. **319.** $\frac{1}{\cos^2 x}(1 + 2\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x)$. **320.** $\frac{\sin^2\frac{x^2+2x-1}{3}}{\cos^4\frac{x^2+2x-1}{3}} \times 2(x+1)$. **321.** $\frac{1}{t^2}\sin\frac{1}{t}\cos\left(\cos\frac{1}{t}\right)$. **322.** $\cos t\cos(\sin t) - \frac{1}{2}\sin 2t\sin(\sin t)$.

323. $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$. **324.** $\frac{2\arcsin\frac{x}{a}}{\sqrt{a^2-x^2}}$. **325.** $\frac{3\left(\arccos\frac{1}{x+1}\right)^2}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}$. **326.** $\frac{x^3}{1+x^2}+$ $+3x^2\operatorname{arctg}x$. **327.** $\frac{x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}}$. **328.** $\sin t\operatorname{arctg}t+t\cos t\operatorname{arctg}t+$ $+\frac{t\sin t}{1+t^2}$. **329.** $\frac{\sqrt{1-t^2}+t\arcsin t}{\sqrt{(1-t^2)^3}}$. **330.** $\frac{2}{1+t^2}$. **331.** $y'(0)=2$. **332.** $y'(0)=1$; $y'(-1)=\frac{1}{2}$. **333.** $\frac{4a^2x}{x^4-a^4}$. **334.** $\frac{3}{4}$. **335.** $-\ln t$. **336.** $2\operatorname{tg}t\sin^2 t$. **337.** $\frac{t}{\ln 3}+$ $+2t\log_3 t$. **338.** $\frac{1}{2t\sqrt{\ln t}}$. **339.** $\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$. **340.** $\frac{1}{\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x}}\times$ $\times\left(\cos x+\frac{\sin 2x}{2\sqrt{1+\sin^2 x}}\right)$. **341.** $\frac{1}{x(1-x^2)}$. **342.** $-\frac{2\sin t}{1+\cos t}\ln(1+\cos t)$.
343. $\sin(t\ln t)+t\ln e t\cos(t\ln t)$. **344.** $\frac{1}{2\sqrt{t}}\cos\sqrt{t}\ln\frac{1}{\sqrt{t}}-$ $-\frac{1}{2\sqrt{t}}\sin\sqrt{t}$. **345.** $\frac{2}{\arccos 2t\sqrt{1-4t^2}}$. **346.** $\frac{a}{(at+b)\left[1+\ln^2(at+b)\right]}$.
347. $\frac{t}{\operatorname{arctg}\sqrt{1+t^2}\,(2+t^2)\sqrt{1+t^2}}$. **348.** $\frac{6x^2\arcsin\left[\ln(a^3+x^3)\right]}{(a^3+x^3)\sqrt{1-\ln^2(a^3-x^3)}}$.
349. $-2te^{-t^2}$. **350.** $\ln a\cos t\, a^{\sin t}$. **351.** $2e^{-x^2}(e^{-2x}\sin e^{-2x}-x\cos e^{-2x})$.
352. $e^{\cos t}(2t\cos t^2-\sin t\sin t^2)$. **353.** $e^{at}(a\sin bt+b\cos bt)$.
354. $\frac{2-2t+3t^2-t^3}{e^t}$. **355.** $-\frac{\sin t+\cos t}{e^t}$. **356.** $\frac{2e^t}{(1-e^t)^2}$. **357.** $\frac{e^{\sqrt{t+1}}}{2\sqrt{t+1}}$.
358. $2^{3^t}3^t\ln 2\ln 3$. **359.** $\frac{e^{\sqrt{\ln t}}}{2t\sqrt{\ln t}}$. **360.** $\frac{2}{a^2}xe^{\frac{-x^2}{a^2}}(a^2-x^2)$. **361.** $a^t t^a\left(\frac{a}{t}+\right.$ $\left.+\ln a\right)$. **362.** $x^x(1+\ln x)$. **363.** $\frac{y}{x^2}\ln\frac{e}{x}$. **364.** $2(\cos 2x\ln\cos x-\sin^2 x)\times$ $\times(\cos x)^{\sin 2x}$. **365.** $x^2(1+3\ln x)x^{x^3}$. **366.** $\frac{2+\ln x\, x^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$. **367.** $(\ln\ln t+$ $\left.+\frac{1}{\ln t}\right)(\ln t)^t$. **368.** $\left(\ln\frac{x}{x+1}+\frac{1}{x+1}\right)\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$. **369.** $2\sqrt[x]{(x+1)^2}\cdot\left[\frac{1}{x(x+1)}-\right.$ $\left.-\ln\frac{x+1}{x^2}\right]$. **370.** $\frac{1}{2}\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}\left(\frac{1}{x}+\operatorname{ctg}x-\frac{e^x}{2(1-e^x)}\right)$. **371.** $x^{\sin x}\times$ $\times\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$. **372.** $x^3e^{x^2}\sin 2x(3+2x^2+2x\operatorname{ctg}2x)$. **373.** $-\frac{\ln a}{x\ln^2 x}$.

374. $\frac{2x^2-3x-1}{\sqrt[3]{(x+1)(x-2)^2}}$. 375. $\frac{1+3x^2-2x^4}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$. 376. $\frac{y(x^3-3x^2-x-1)}{x(x-1)(x^2+1)}$. 377. $ye^x\times$ $\times\left(\frac{1}{x}+\ln x\right)$. 378. $yx^x\left(\frac{1}{x}+\ln x+\ln^2 x\right)$. 379. $-x^2e^{-x}$. 380. $\frac{6x}{\sqrt{9x^4+1}}$.

381. $\frac{1}{x\sqrt{4x^2-1}}$. 382. $\frac{6}{x^2+9}$. 383. $\frac{1+\sin x}{(x-\cos x)\ln 10}$. 384. $\frac{5}{2}\sec^2\frac{x}{5}$. 385. $\sin 2x\times$ $\times\ \frac{3}{2}(\cos x-2)$. 386. $e^{\cos x}(\cos x-\sin x)$. 387. $\frac{-2x}{(\sqrt{1+x^4})^3}$. 388. $\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$.

389. $-xe^{\frac{-x^2}{2}}$. 390. $2\ln 2\cos 2x\,2^{\sin 2x}$. 391. $-\cos 2x$. 392. $\operatorname{ctg} x$.

393. $\frac{\cos\ln|x|}{x}$. 394. $-\frac{2^x\ln 2}{2^{2x}+1}$. 395. $\sec x$. 396. $e^{\sqrt{2x}}$. 397. $\frac{10}{x(x^5+2)}$.

398. $\frac{\cos x}{(1+\sin^2 x)}$. 399. $-\frac{1}{1+x^2}$. 400. $\frac{2\sin 2x}{\cos^2 2x}$. 401. $2x^2e^{2x+3}$.

402. $\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x-\sin^2 x}}$. 403. $-\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$. 404. $(x^2+1)/(x^4+1)$. 405. $-\sin 2x\times$ $\times\cos\cos 2x$. 406. $\sin x\ln\operatorname{tg} x$. 407. $\cos\ln x$. 408. $-n\cos^{n-1}x\sin(n+1)x$.

409. $\frac{\cos x}{\sqrt{2+\cos 2x}}$. 410. $2\ln 2x\cos x^2 2^{\sin x^2}$. 411. $-\ln 3x\sin 2x\,3^{\cos^2 x}$.

412. $\frac{1}{e^x-1}$. 413. $\frac{x^2}{1-x^4}$. 414. $-\cos 2x$. 415. $\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin^2 x}$. 416. $\arcsin^2 x$.

417. $\frac{\sin 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$. 418. $\frac{2}{x(\ln x^2)\ln\ln x^2}$; $x>e$. 419. $\frac{-\sqrt{2}\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}$.

420. $-\frac{1}{\cos x}$. 421. $\frac{\cos x}{\cos\sin x}$. 422. $y'=0; x>0; x\neq 1$. 423. $x^{1+x^2}(1+2\ln x)$.

424. $y^{(IV)}=120x+48; y^{(V)}=120$. 425. $2^x\ln^n 2$. 426. $\frac{1}{(x+1)^4}$. 427. $\frac{2\ln x-3}{x^3}$.

428. $105\sqrt{2x+3}$. 429. $\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)\sqrt{x}}{2^n}$. 430. $-\frac{3}{2}2^n\cos\left(2x+\right.$ $\left.+\frac{\pi n}{2}\right)$. 431. $[2^x+(-1)^n 2^{-x}]\ln^n 2$. 442. $\frac{3}{2}t$. 443. $-\frac{1+\cos t}{\sin t}$. 444. $-\frac{b}{a}$.

445. $-\operatorname{tg}\varphi$. 446. $-3t^2e^t$. 447. $1-\frac{3}{t}+\frac{9}{t^2}$. 448. $-\frac{\operatorname{cosec}^4\frac{t}{2}}{4a}$. 449. $-4\sqrt{t-t^2}$.

450. $(-1)^n\frac{1}{t}$. 451. 0. 452. $-\frac{x}{y}$. 453. $\frac{(2xe^y-3x^2)y}{1-x^2ye^y}$. 454. $(x^2-y)(x-y^2)$.

455. $-\frac{x}{3y}$. 456. $2x$. 457. $\frac{y}{x}$. 458. $-\frac{y}{2x\ln x}$.

VII бүлек

459. Үсүчән функция. **460.** $]-\infty;\ 0[\cup]\frac{16}{3};\ +\infty[$ — үсә; $]0;\ \frac{16}{3}[$ — кими. **461.** $]-\infty;+\infty[$ — үсә. **462.** $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ — үсә; $]-1;+1[$ — кими. **463.** $k > 0$ үсә; $k < 0$ булганда кими. **464.** $(-\infty;-3]$ — кими; $[3;+\infty)$ — үсә. **465.** Кимүче. **466.** Үсүче. **471.** $y_{min} = -e^4$, $x = 4$ булганда. **472.** $y_{min} = -\frac{1}{2}$, $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ булганда. **473.** $y_{min} = 0$, $x = 1$ булганда. **474.** $y_{max} = 1$, $x = 2$ булганда. **475.** $y_{max} = 3$, $x = 1$ булганда; $y_{min} = 0$, $x = 2$ булганда. **476.** $y_{min} = 0$, $x = 0$ булганда. **477.** $y_{min} = 2$, $x = \frac{2}{3}$ булганда. **478.** $y_{max} = 2{,}5$, $x = 1$ булганда; $y_{min} = \frac{e(4-e)}{2}$, $x = e$ булганда. **479.** $y_{max} = \frac{1}{\pi}$, $x = 1$ булганда; $y_{min} = -\frac{1}{\pi}$, $x = 3$ булганда. **480.** $y_{max} = 0$, $x = 0$ булганда; $y_{min} = \frac{3\sqrt{3}-2\pi}{48}$, $x = \frac{1}{2}$ булганда. **481.** $y_{max} = -1{,}5$, $x = 2$ булганда; $y_{min} = 2{,}5$, $x = 0$ булганда; $y_{min} = -2$, $x = 3$ булганда. **482.** $y_{min} = 0$, $x = 0$ булганда. **483.** Иң кечкенәсе — 2, иң зуры — 66. **484.** Иң зуры — 0, иң кечкенәсе — 10. **485.** Иң зуры — 1, иң кечкенәсе — $2(1-\ln 2)$. **486.** Иң зуры — $\frac{3}{2}$, иң кечкенәсе — 1. **487.** Иң зуры — $\frac{3}{5}$, иң кечкенәсе — -1. **488.** Иң зуры — $\frac{\pi}{2}$, иң кечкенәсе — $-\frac{\pi}{2}$. **489.** Иң зуры — 1, кечкенәсе юк. **490.** Иң зуры юк, иң кечкенәсе — $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$. **491.** Иң зуры — $\sqrt[3]{9}$, иң кечкенәсе — 0. **497.** $y_{min}(2) = 3$. **498.** Экстремумы юк. **499.** Экстремумы юк. **500.** $y_{min}(2\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}$, $y_{max}(-2\sqrt{3}) = -3\sqrt{3}$. **501.** $y_{min}(-1) = -2$, $y_{max}(1) = 2$. **502.** $y_{max}(e^2) = \frac{2}{e}$. **503.** $y_{min}\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$. **504.** $y_{min}(0) = 1$. **505.** $y_{max}(1) = e$. **506.** $y_{min}(6) = 13{,}5$. **507.** $y_{max}(2) = \frac{4}{e^2}$, $y_{min}(0) = 0$. **508.** Экстремумы юк. **509.** $y_{max}(2k\pi) = 0$. **510.** $y_{min}(2k\pi) = 1$. **511.** Экстремумы юк.

VIII бүлек

517. $D(z) = \{(x,y) \in R^2 |\ x^2 + y^2 \le 1\}$. **518.** $D(z) = \{(x,y) \in R^2 |\ -1 \le x + y \le 1\}$. **519.** $D(z) = \{(x,y) \in R^2 |\ 4 \le x^2 + y^2 \le 9\}$. **520.** $D(z) = \{(x,y) \in R^2 |\ x \ne -\frac{y}{2}\}$. **521.** $D(z) = \{(x,y) \in R^2 |\ y \ne \pm x\}$. **522.** $D(z) = \{(x,y) \in R^2 | y > x,\ y > 0,\ x \ne 0\}$. **523.** $D(z) = \{(x,y) \in R^2 |\ x^2 + y^2 \le 1\}$. **524.** $D(z) = \{(x,y) \in R^2 | -3 \le x \le 3,\ -\frac{1}{2} \le y \le \frac{1}{2}\}$. **525.** $D(z) = \{(x,y) \in R^2 |\ y^2 > 4x - 8\}$. **526.** $D(z) = \{(x,y) \in R^2 |\ x^2 + y^2 \ne R^2\}$. **527.** $D(z) =$

$=\{(x,y)\in R^2 | x^2+y^2=R^2\}$. **528.** 1. **529.** $\frac{5}{4}$. **530.** Юк. **531.** 0. **532.** 0. **533.** Юк. **534.** 1. **535.** $u'_x=2x-3y-4$, $u'_y=4y-3x+2$. **536.** $u'_x=\frac{2x}{y^2}-\frac{1}{y}$, $u'_y=\frac{x}{y^2}-\frac{2x^2}{y^3}$. **537.** $z'_x=e^{xy(x^2+y^2)}\cdot(3x^2y+y^3)$, $z'_y=e^{xy(x^2+y^2)}(x^3+3xy^2)$. **538.** $z'_x=yx^{y-1}+y^x\ln y$, $z'_y=x^y\ln x+xy^{x-1}$. **539.** $z'_x=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

$z'_y=\frac{y}{x^2+y^2+x\sqrt{x^2+y^2}}$. **540.** $z'_x=\frac{\sqrt{2}\,xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}$, $z'_y=\frac{\sqrt{2}\,x^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}$.

541. $z'_x=\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x^2}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}$, $z'_y=-\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}-\frac{1}{x}\sin\frac{x}{y}\times\sin\frac{y}{x}$. **542.** $u'_x=-\frac{2xy}{(1+x^2)^2+y^2}$, $u'_y=\frac{1+x^2}{(1+x^2)^2+y^2}$. **543.** $u'_x=(y-z)\times(2x-y-z)$, $u'_y=(x-z)(x-2y+z)$, $u'_z=(x-y)(-y+2z-x)$.

544. $u'_x=yz(xy)^{z-1}$, $u'_y=xz(xy)^{z-1}$, $u'_z=(xy)^z\ln(xy)$. **545.** $u'_x=2x\times\cos(x^2+y^2+z^2)$, $u'_y=2y\cos(x^2+y^2+z^2)$, $u'_z=2z\cos(x^2+y^2+z^2)$. **546.** $u'_x=\frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}$, $u'_y=\frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x$, $u'_z=-\frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln x$. **547.** $\frac{2}{5};\frac{1}{5}$.

548. $0;\frac{1}{4}$. **549.** 12; 0. **550.** 0. **551.** $\frac{2}{3\sqrt[3]{4}};\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$. **557.** $dz=\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

558. $dz=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$. **559.** $dz=-\frac{xdx+ydy}{z}$. **560.** $dz=6xy^5dx+15x^2y^4dy$. **561.** $dz=2x^{yz}\left(\frac{yz}{x}dx+z\ln x\,dy+y\ln x\,dz\right)$. **562.** $du=\frac{yzdx+xzdy-xydz}{z^2}$. **563.** $dz=\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}(ydx-xdy)$. **564.** $du=\sin 2x\,dx-\sin 2y\,dy$. **565.** $du=\frac{2(xdx+ydy)}{x^2+y^2}$. **566.** $du=0$. **567.** $du=-\sin(xy)(ydx+xdy)$. **568.** $du=dx+2dy+e^zdz$. **569.** $d^2z=6dx^2+10dxdy-48ydy^2$.

570. $d^2z=\frac{2dxdy+xy(x^2dy^2+y^2dx^2)}{\sqrt{(1-x^2y^2)^3}}$. **571.** $d^2z=\frac{2}{(x+y)^3}[xdy^2+(x-y)dxdy-ydx^2]$. **572.** $d^2z=e^{x+y^2}[dx^2+4ydxdy+(2+4y^2)dy^2]$.

573. $d^2u=-\sin(x+y+z)(dx+dy+dz)^2$. **574.** $d^2z=\frac{y^2-a^2}{z^3}dx^2-\frac{2xydxdy}{z^3}+\frac{x^2-a^2}{z^3}dy^2$. **575.** $d^2u=2(xdydz+ydxdz+zdxdy)$. **576.** $d^2z=e^{xy}[(ydx+xdy)^2+2dxdy]$. **577.** $d^2u=2dx^2+4dy^2+6dz^2-4dxdy+8dxdz+4dydz$. **578.** $d^2u=6dx^2+2dxdy+4{,}5dy^2$. **579.** $\frac{dz}{dt}=$

$= e^{3\cos t + 2t^2}(4t - 3\sin t)$. **580.** $\frac{dz}{dx} = ye^{xy} + xe^{xy}\varphi'(x)$. **581.** $\frac{dz}{dx} = 2ue^{v}\cos x + u^2e^{v}(-\sin x)$. **582.** $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{e^t}{e^x + e^t}$; $\frac{dz}{dt} = \frac{e^t + 3t^2 - e^x}{e^x + e^t}$. **583.** $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x^2+1}$.
584. 0. **585.** $\frac{du}{dx} = \frac{1 - 2(x+1)^2 e^{(1+x)^2}}{y^2 + (1+x)^2}$. **586.** $\frac{dz}{dx} = \frac{e^x(x+1)}{1 + x^2e^{2x}}$. **587.** $\frac{dz}{dt} = \frac{e^t(t\ln t - 1)}{t\ln^2 t}$. **588.** $\frac{du}{dt} = \frac{1}{\sqrt{y}}\operatorname{ctg}\frac{x}{\sqrt{y}}\left(6 - \frac{x}{2y^2}\right)$. **589.** $\frac{du}{dt} = 0$. **590.** $\frac{dz}{dx} = \sin x^{\cos x}(\cos x \operatorname{ctg} x - \sin x \ln\sin x)$. **591.** $\frac{\partial z}{\partial u} = 0$; $\frac{\partial z}{\partial v} = 1$. **598.** $x - 2y + 3z = 6$; $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{3}$. **599.** $\frac{x-2}{12} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z-11}{-1}$. **600.** $2x + 4y + z = 21$; $\frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-1}{1}$. **601.** $x + y - z = \pm 9$. **602.** $12x - 3y + 2z = \pm 13$.

IX бүлек

605. $\frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 3x + C$. **606.** $\frac{x^4}{4} + \frac{(a+b)x^3}{3} + \frac{abx^2}{2} + C$.
607. $a^2x + \frac{abx^4}{2} + \frac{b^2x^7}{7} + C$. **608.** $\frac{x^3}{3} - 4x + 8\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C$. **609.** $\frac{1}{4\sqrt{3}} \times \ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right| + C$. **610.** $\frac{2z^2 - 12z - 6}{3\sqrt{z}} + C$. **611.** $\frac{6}{7}\sqrt[6]{z^7} - \frac{4}{3}\sqrt[4]{z^3} + C$. **612.** $\operatorname{tg}x - \operatorname{ctg}x + C$. **613.** $\frac{1}{2}\arcsin\frac{2t}{\sqrt{3}} + C$. **614.** $-\frac{1}{3}\left(1 - x^2\right)^{\frac{3}{2}} + C$. **615.** $\frac{(5e)^x}{\ln 5 + 1} + C$.
616. $\frac{e^{3z}3^z}{\ln 3 + 3} + C$. **617.** $3z - \frac{2(1{,}5)^z}{\ln 1{,}5} + C$. **618.** $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2 - 1 - \sqrt{2}}{x^2 - 1 + \sqrt{2}}\right| + C$.
619. $\operatorname{arctg}z - \frac{1}{z} + C$. **620.** $\operatorname{tg}z + C$. **621.** $-\frac{1}{3}e^{3\cos t} + C$. **622.** $\ln|\ln t| + C$.
623. $2\sqrt{t} + \frac{\ln^2 t}{2} + C$. **624.** $\frac{2}{3}\sin t\sqrt{\sin t} + C$. **625.** $\frac{x^5}{5}\ln x - \frac{1}{25}x^5 + C$.
626. $x(\ln x - 1) + C$. **627.** $z\ln(z^2 + 1) - 2z + 2\operatorname{arctg}z + C$. **628.** $2\sqrt{z+1} \times \arcsin z + 4\sqrt{1-z} + C$. **629.** $z\arccos z - \sqrt{1 - z^2} + C$. **630.** $z\operatorname{arctg}\sqrt{z} - \sqrt{z} + \operatorname{asrctg}\sqrt{z} + C$. **631.** $e^t(t^2 - 2t + 2) + C$. **632.** $\frac{1}{3}x^2\sin 3x + \frac{2}{9}x\cos 3x - \frac{2}{27}\sin 3x + C$. **633.** $\frac{t}{2}(\cos\ln t + \sin\ln t) + C$. **634.** $\frac{1}{2}z\sqrt{a^2 - z^2} + \arcsin\frac{z}{a} \times \frac{a^2}{2} + C$. **635.** $\frac{z}{2}(\sin\ln z - \cos\ln z) + C$. **636.** $-\frac{t\cos 2t}{4} + \frac{\sin 2t}{8} + C$.
637. $-t\operatorname{ctg}t + \ln|\sin t| + C$. **638.** $-\frac{t}{\sin t} + \ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right| + C$. **639.** $\frac{1}{2}[(t^2 - 1)\sin t -$

$-(t-1)^2\cos t]e^t + C$. **641.** $\frac{3}{14}(2x+3)(x-2)\sqrt[3]{2-x} + C$. **642.** $\frac{2}{3}(\ln x - 2)\sqrt{1+\ln x} + C$. **643.** $\frac{2}{5}\sqrt{5z-2} + C$. **644.** $\frac{3}{2}(t+1)^{\frac{2}{3}} - 3(t+1)^{\frac{1}{3}} + 3\ln\left|1 + \sqrt[3]{(t+1)}\right| + C$. **645.** $t - 2\ln\left(1+\sqrt{e^t+1}\right) + C$. **646.** $\frac{1}{2}\ln\left(t^2+\sqrt{t^4+1}\right) + C$.

647. $t - 2\sqrt{t} + 2\ln\left(1+\sqrt{t}\right) + C$. **648.** $2\sqrt{t} - 4\sqrt[4]{t} + 4\ln\left(1+\sqrt[4]{t}\right) + C$.

649. $\frac{1}{4\sqrt{5}}\ln\left|\frac{e^{2z}-\sqrt{5}}{e^{2z}+\sqrt{5}}\right| + C$. **650.** $\frac{1}{2\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{e^{2z}}{\sqrt{5}} + C$. **651.** $2\arcsin\left(\frac{\sqrt{e^t}}{4}\right) + C$. **652.** $\frac{4}{3}\left[\sqrt[4]{x^3} - \ln\left(1+\sqrt[4]{x^3}\right)\right] + C$. **653.** $\ln\left(\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x}\right) + C$.

654. $\frac{4}{21}(3e^z - 4)\sqrt[4]{(e^z+1)^3} + C$. **655.** $2\ln|x| + \ln|x+2| + \frac{10}{x+2} + C$.

656. $\frac{1}{a-b}(\ln|z+b| - \ln|z+a|) + C$. **657.** $\ln\left|\frac{(x-1)^3(x-4)^5}{(x-2)^7}\right| + C$. **658.** $x + 3\ln|x-3| - 3\ln|x-2| + C$. **659.** $\frac{3}{2}x^2 + 9x + \ln|x| - 5\ln|x-1| + \frac{25}{3}\ln|x-2| + C$. **660.** $z + \frac{1}{3}\operatorname{arctg} z - \frac{8}{3}\operatorname{arctg}\frac{z}{2} + C$. **661.** $-\frac{1}{4(x-1)^2} - \frac{3}{8(x-1)} + \frac{5}{32}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right| + C$. **662.** $\frac{1}{4}z + \frac{1}{16}\ln\left|\frac{z^{16}}{(2z-1)^7(2z+1)^9}\right| + C$. **663.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} z + C$. **664.** $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{z^2+z\sqrt{2}+1}{z^2-z\sqrt{2}+1}\right| + \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(z\sqrt{2}+1) + \operatorname{arctg}(z\sqrt{2}-1) + C$. **665.** $\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}} + C$.

666. $\frac{3}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$. **667.** $\frac{2t-1}{2(t^2+2t+2)} + \operatorname{arctg}(t+1) + C$.

668. $\frac{t^2}{2+7t} + \frac{75}{2}\ln|t-5| - \frac{1}{2}\ln|t-1| + C$. **669.** $t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| - \operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C$. **670.** $2\sqrt{x-1}\left[\frac{(x-1)^3}{7} + \frac{3(x-1)^2}{5} + x\right] + C$. **671.** $2\sqrt{x} - 2\sqrt{2} \times \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{2}} + C$. **672.** $4\sqrt[4]{t} + 2\ln(1+\sqrt{t}) - 4\operatorname{arctg}\sqrt[4]{t} + C$. **673.** $-\frac{1}{\sqrt{3}} \times \ln\left|\frac{1}{x} + \frac{1}{3} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{2}{3x} + \frac{1}{3}}\right| + C$. **674.** $C - \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$. **675.** $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + C$. **676.** $\frac{x-3}{2}\sqrt{x^2+2x+2} + C$. **677.** $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-z^2}}{1+\sqrt{1-z^2}}\right| + C$.

678. $6\sqrt[6]{z}+3\sqrt[3]{z}+2\sqrt{z}+6\ln\left|1+\sqrt[6]{z}\right|+C.$ **679.** $-\frac{\sqrt{2x+3}}{x}+C.$ **680.** $3\ln\left|z+\frac{3}{2}+\sqrt{z^2+3z+3}\right|+\ln\left|\frac{1}{z+1}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{z^2+3z+3}}{z+1}\right|+C.$ **681.** $\frac{6}{5}\sqrt[6]{z^5}-2\sqrt{z}+6\sqrt[6]{z}-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{z}+C.$ **682.** $\sqrt{\frac{x}{x+2}}+C.$ **683.** $\frac{2a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}+C.$ **684.** $\frac{z^3+2z}{4}\times\sqrt{z^2+4}-2\ln\left(z+\sqrt{z^2+4}\right)+C.$ **685.** $\left(\frac{z}{6}-\frac{a^2z^3}{24}-\frac{a^4z}{16}\right)\sqrt{a^2-z^2}+\frac{a^6}{16}\arcsin\frac{z}{|a|}+C.$ **686.** $\frac{3z^2+6z+5}{8(z+1)^4}\sqrt{z^2+2z}-\frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{|z+1|}+C.$ **687.** $\frac{1}{2(z+1)^2}\sqrt{z^2+2z}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{z+1}+C.$ **688.** $\left(\frac{1}{4z^4}+\frac{3}{8z^2}\right)\sqrt{z^2-1}-\frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{z}+C.$ **689.** $\frac{2}{3a}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{at}{2}\right)+C.$ **690.** $t-\operatorname{tg}\frac{t}{2}+C.$ **691.** $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1+2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}{2-\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\right|+C.$ **692.** $\frac{1}{2}\cos t-\frac{3}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos t-1}{\sqrt{2}\cos t+1}\right|+C.$ **693.** $\operatorname{cosec} t-\frac{1}{3}\operatorname{cosec}^3 t+C.$ **694.** $2\sec t+C.$ **695.** $\frac{1}{2}(\operatorname{tg}t+\ln|\operatorname{tg}t|)+C.$ **696.** $\frac{\sin^3 t}{3}-\frac{\sin^5 t}{5}+C.$ **697.** $\frac{t}{8}-\frac{\sin 4t}{32}+C.$ **698.** $\frac{3t}{8}-\frac{\sin 2t}{4}+\frac{\sin 4t}{32}+C.$ **699.** $\frac{5}{16}t+\frac{1}{4}\sin 2t+\frac{3}{64}\sin 4t-\frac{1}{48}\sin^3 2t+C.$ **700.** $\frac{\sin^5 t}{5}-\frac{2}{7}\sin^7 t+\frac{1}{9}\sin^9 t+C.$ **701.** $-\frac{\operatorname{ctg}^3 t}{3}+C.$ **702.** $\operatorname{tg} t+\frac{\operatorname{tg}^3 t}{3}-2\operatorname{ctg} 2t+C.$ **703.** $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x-\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x-\ln|\cos x|+C.$ **704.** $\frac{\ln|C\cdot\sin x|}{\sqrt{\cos 2x}}.$ **705.** $-\frac{1}{4}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{8\sin^2\frac{x}{2}}+C.$ **706.** $C-\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{ctg} 2x).$ **707.** $C-\frac{1}{4}\left(\frac{\cos 4x}{2}+\cos 2x\right).$

708. $\frac{1}{10}\sin 5x+\frac{1}{2}\sin x+C.$ **709.** $-\frac{1}{10}\sin 5x+\frac{1}{2}\sin(x+4)+C.$

710. $-\frac{1}{10}\cos(5x+2)-\frac{1}{2}\cos(x-4)+C.$ **711.** $\sqrt{\cos x}\left(\frac{4}{7}\cos^3 x-\frac{2}{3}\cos x-\frac{2}{11}\cos^5 x\right)+C.$ **712.** $\frac{2}{3}\sin x\sqrt{\sin x}-\frac{2}{7}\sin^3 x\sqrt{\sin x}+C.$

X бүлек

713. 19. **714.** $\frac{1}{3}\ln 25$. **715.** $7+\sin 2-\sin 1+\ln 2$. **716.** $\frac{16}{3}-2\sqrt{3}+$ $+\operatorname{arctg}\frac{1}{13}$. **717.** $\frac{\pi}{2}$. **718.** $\frac{2}{3}(\sqrt{21}-\sqrt{13})$. **719.** $\frac{2}{3}(\sqrt{5}-2)$. **720.** $\frac{\pi}{2}$. **721.** 12. **722.** $\frac{1}{4}$. **723.** $-\frac{2}{3}$. **724.** $\frac{7}{4}$. **725.** $\sqrt{2}-1$. **726.** $\frac{464\sqrt{2}}{15}$. **727.** $\frac{\pi}{8}$. **728.** $e-\sqrt{e}$. **729.** $-\frac{2e^3+1}{9}$. **730.** $\pi^3-6\pi$. **731.** $\frac{\pi a^2}{4}$. **732.** $1-\frac{2}{e}$. **733.** 0. **734.** $\frac{t^2+3}{8}$. **735.** $\frac{1}{2}(e^{\pi}+1)$. **736.** $\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$. **737.** $\frac{\pi}{2}$. **738.** 4. **739.** $\frac{5}{3}-2\ln 2$. **740.** $4-2\ln 3$. **741.** $2-\frac{\pi}{2}$. **742.** $\frac{1}{5}\ln 112$. **743.** $\frac{1}{3}$. **744.** $\ln\frac{e+\sqrt{1+e^x}}{1+\sqrt{2}}$. **745.** $\frac{848}{105}$. **746.** $-\frac{8}{e}+3$. **747.** $e-2+\ln 2$. **748.** $\sqrt{2}-$ $-\frac{\sqrt{1+e}}{e}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{1+e}-1}{\sqrt{1+e}+1}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)$. **749.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{9+4\sqrt{2}}{7}$. **750.** $\frac{1}{3}$. **751.** $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$. **752.** $\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}$. **753.** $\frac{\pi}{2\sqrt{1+a^2}}$. **754.** $\ln 2$. **755.** $\frac{8}{21}$. **756.** 0. **757.** $\frac{2}{5}$. **758.** $-\frac{\pi}{2}$. **759.** $\frac{\ln 3-1}{2}$. **760.** 8,5. **761.** 9. **762.** $\frac{125}{6}$. **763.** 4,5. **764.** $\frac{1}{6}$. **765.** $6\pi-\frac{4}{3}$ һәм $2\pi+\frac{4}{3}$. **766.** $\frac{32}{15}$. **767.** $\frac{32}{3}$. **768.** $\frac{4}{3}p^2$. **769.** $2-\frac{1}{\ln 2}$. **770.** $\frac{32}{3}$. **771.** $\frac{3}{14}$. **772.** $\frac{3\pi a^2}{8}$. **773.** $6\pi a^2$. **774.** $\frac{8}{15}$. **775.** 169π. **776.** a^2. **777.** 11π. **778.** $\frac{9\pi}{2}$. **779.** $\frac{\pi^2}{2}$. **780.** πpa^2. **781.** $8\frac{2}{15}\pi$. **782.** $\frac{\pi a^3}{8}\left(e^{\frac{2b}{a}}-e^{-\frac{2b}{a}}\right)+\frac{\pi^2 ab}{2}$. **783.** $\frac{16\pi}{15}$. **784.** $\frac{8\pi}{3}$. **785.** $2\pi R$. **786.** $\frac{335}{27}a$. **787.** $6a$. **788.** $\frac{28}{3}$. **789.** $\ln 3-\frac{1}{2}$. **790.** $\sqrt{1+e^2}-\sqrt{2}+$ $+\ln\frac{(\sqrt{1+e^2}-1)(\sqrt{2}+1)}{e}$. **791.** $4\frac{26}{27}$. **792.** $\frac{1}{4}(1+e^2)$. **793.** $8a$. **794.** $1+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(1+\sqrt{2})$. **795.** 5π. **796.** $\sqrt{2}(\pi-1)$. **797.** $\frac{1}{8}(2\pi-3\sqrt{3})$. **798.** $\frac{a}{8}(2\pi+3\sqrt{3})$. **799.** $\frac{\pi}{2}[2\sqrt{5}+\ln(\sqrt{5}+2)]$. **800.** $\frac{61\pi}{1728}$. **801.** $\frac{64\pi a^2}{3}$. **802.** $\frac{32\pi a^2}{5}$. **803.** $2\pi a^2(2-\sqrt{2})$. **804.** $\frac{1}{3}$. **805.** $\frac{3}{8}$. **806.** -1.

807. Тарала. **808**. Тарала. **809**. $\frac{1}{a}$. **810**. $\frac{\pi}{2}$. **811**. $\frac{1}{2}$. **812**. Тарала. **813**. 2. **814**. $-\frac{1}{4}$. **815**. Тарала. **816**. 2. **817**. 1. **818**. $-\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. **819**. Тарала.

XI бүлек

821. $\int_{-7}^{1} dy \int_{2-\sqrt{7-6y-y^2}}^{2+\sqrt{7-6y-y^2}} f(x,y)\,dx$. **822**. $\int_{0}^{2} dy \int_{0}^{2-\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx + \int_{0}^{2} dy \int_{2+\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{16-y^2}} f(x,y)\,dx + \int_{2}^{4} dy \int_{0}^{\sqrt{16-y^2}} f(x,y)\,dx$. **823**. $\int_{0}^{1} dx \int_{x}^{3\sqrt{x}} f(x,y)\,dy$. **824**. $\int_{0}^{\frac{8}{3}} dy \int_{2y-2}^{\sqrt{4+y^2}} f(x,y)\,dx$. **825**. $\frac{4}{3}a^4$. **826**. $\frac{1}{a}$. **827**. $\frac{\pi}{2}$. **828**. $\frac{1}{2}$. **829**. $\frac{9}{20}$. **830**. 2. **831**. $-\frac{1}{4}$. **832**. $\frac{4}{3}$. **833**. e. **834**. $\frac{a^3b^2}{15}$. **835**. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{0}^{R} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr$. **836**. $\frac{\pi}{2}\int_{0}^{R} f(r^2)\,r\,dr$. **837**. $\frac{R^2}{2} \times \int_{0}^{\mathrm{arctg}R} f(\mathrm{tg}\varphi)\,d\varphi$. **838**. $\frac{\pi}{4}\left[(1+R^2)\ln(1+R^2)-R^2\right]$. **839**. $\frac{\pi(\pi-2)}{8}$. **840** $\pi R^2 h$. **841**. $\frac{R^3}{3}\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$. **842**. $\frac{\pi^2}{6}$. **843**. $\frac{1}{a}\int_{0}^{a} dv \int_{0}^{a} f\left(\frac{u(a-v)}{a}, \frac{uv}{a}\right) u\,du$. **844**. $\frac{1}{3}\int_{a}^{b} du \int_{p}^{q} f\left(\sqrt[3]{u^2v}, \sqrt[3]{uv^2}\right) dv$. **845**. $\frac{1}{2}\int_{1}^{3} du \int_{-u}^{6-u} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) dv$. **846**. $\frac{1}{2}\int_{p}^{q} du \int_{a}^{b} f\left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right)\frac{dv}{v}$. **847**. $2\pi ab(c-\sqrt{c^2-1})$. **848**. $\frac{5}{48} \times \left(a^{-\frac{6}{5}}-b^{-\frac{6}{5}}\right)\left(q^{\frac{8}{5}}-p^{\frac{8}{5}}\right)$. **849**. 2. **850**. $\frac{ab}{6}$. **851**. $\frac{5}{8}\pi a^2$. **852**. $2a^2$. **853**. $\frac{1}{60}$. **854**. $\frac{16}{3}ab^2$. **855**. $\frac{4}{3}a^3(2-\sqrt{2})$. **856**. $\frac{16}{15}$. **857**. $\frac{a^3}{2}$. **858**. $\frac{2}{3}\pi a^3 \times \left(3-\sqrt{2}\right)$. **859**. $2\sqrt{2}\,\pi p^2$. **860**. $2\pi R^2$. **861**. $8\sqrt{2}\,ab$. **862**. $\frac{16}{3}(\sqrt{8}-1)$. **863**. $\frac{2\pi}{3}\left\{(1+R^2)^{\frac{3}{2}}-1\right\}$. **864**. $\frac{2\pi}{3}\left(\sqrt{8}-1\right)$. **865**. $4\pi a(a-\sqrt{a^2-R^2})$.

866. $2R^2(\pi - 2)$. **867.** $\frac{1}{364}$. **868.** $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{16}$. **869.** $\frac{1}{48}$. **870.** $\frac{4}{5}\pi abc$.
871. $\frac{\pi}{6}$. **872.** $\frac{59}{480}\pi R^5$. **873.** $\frac{\pi abc^2}{4}$. **874.** $\frac{\pi h^2 R^2}{4}$. **875.** $\frac{4}{3}a^3h$. **876.** $\frac{\pi a^4}{4}$.
877. $\frac{19}{24}\pi$. **878.** $\frac{a^4}{10}$. **879.** $\frac{4}{15}\pi ah$. **880.** $\frac{16}{3}\pi$. **881.** $\pi a^4 \sin^2\frac{\alpha}{2}$.
882. $\frac{1}{105}$. **883.** $6\pi a^2$. **884.** $\frac{\pi R^3}{12}(2-\sqrt{2})$. **885.** $\frac{\pi a^4}{16}$. **886.** $\frac{8\pi R^{\frac{7}{2}}}{21}$.
887. $\frac{3}{35}$. **888.** $\frac{7}{24}$. **889.** $\frac{2}{3}a^3(3\pi - 4)$. **890.** $\frac{\pi a^3}{6}$. **891.** $\frac{a^3}{25}(3\pi - 4)$.
892. $\frac{32}{3}\pi$. **893.** πa^3. **894.** $\frac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}}$. **895.** $\frac{1}{2}$. **896.** $\frac{\pi}{3}(2-\sqrt{2})$. **897.** $\frac{3}{2}h^2$.
898. $\frac{4}{3}\gamma ab^2$. **899.** $\frac{\pi a^2}{3}$. **900.** $\frac{\pi a^5}{5}\left(18\sqrt{3} - \frac{97}{6}\right)$.

XII бүлек

901. $1+\sqrt{2}$. **902.** $\frac{256}{15}a^2$. **903.** $2\pi^2 a^3(1 + 2\pi^2)$. **904.** $\frac{a^3}{6}(\operatorname{ch}^{\frac{3}{2}} 2t_0 - 1)$.
905. $4a^{\frac{7}{3}}$. **906.** $2(e^a - 1) + \frac{\pi}{4}ae^a$. **907.** $2a^2(2-\sqrt{2})$. **908.** $\frac{2ka^2\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}$.
909. $2a^2$. **910.** $\frac{\pi}{a}$. **911.** 5. **912.** $\sqrt{3}$. **913.** $|x_0| + |z_0|$, биредә $|x_0| < a$.
914. $\frac{3}{4\sqrt{2}}\left(\sqrt[3]{\frac{3z_0^4}{a}} + 2\sqrt[3]{\frac{az_0^2}{3}}\right)$. **915.** $40\frac{19}{30}$. **916.** $-2\pi a^2$. **917.** а) $\frac{4}{3}$; б) 0;
в) $\frac{12}{5}$; г) -4; д) 4. **918.** а, б, в, г, 4. **919.** -2π. **920.** $\frac{4}{3}ab^2$.
921. $-2\sin 2$. **922.** $-2\pi\alpha(a+b)$. **923.** $-\pi R^2\cos^2\alpha$. **924.** $\left(\frac{1}{6}+\frac{\pi\sqrt{2}}{16}\right)R^3$.
925. 8. **926.** 12. **927.** 4. **928.** -2. **929.** $\int_0^{a+b} f(u)du$. **930.** $-\frac{3}{2}$. **931.** 9.
932. $\int_{x_1}^{x_2}\varphi(x)dx + \int_{y_1}^{y_2}\psi(y)dy$. **933.** 62. **934.** 1. **935.** $\frac{\pi a^4}{2}$.
936. $-2\pi ab$. **937.** $-\frac{1}{5}(e^{\pi} - 1)$. **938.** 0. **939.** πa^3. **940.** $\frac{\pi}{2}(1+\sqrt{2})$.
941. $\frac{3-\sqrt{3}}{2} + (\sqrt{3} - 1)\ln 2$. **942.** $\frac{125\sqrt{5}-1}{420}$. **943.** $\frac{64\sqrt{2}}{15}a^4$. **944.** $4\pi a^3$.
945. 0. **946.** $3a^4$. **947.** $\frac{12}{5}\pi a^5$. **948.** $-\frac{\pi h^4}{2}$.

XIII бүлек

964. Җыела. **965.** Җыела. **966.** Җыела. **967.** Җыела. **968.** Таркала. **969.** Җыела. **970.** Җыела. **971.** Таркала. **972.** Таркала. **973.** Җыела. **974.** Таркала. **975.** Җыела. **976.** Таркала. **977.** Җыела. **978.** Таркала. **979.** Таркала. **980.** Таркала. **981.** Җыела. **982.** Җыела. **983.** Таркала. **984.** Шартлы җыела. **985.** Абсолют җыела. **986.** Таркала. **987.** Абсолют җыела. **988.** Таркала. **989.** Шартлы җыела. **990.** Абсолют җыела. **991.** Абсолют җыела. **992.** Абсолют җыела. **993.** $\alpha > 1$ булганда, абсолют җыела; $0 < a \leq 1$ булганда, шартлы җыела; $a \leq 0$ — таркала. **994.** Шартлы җыела. **995.** Барлык $a \in R$ өчен абсолют җыела. **996.** Таркала. **997.** Шартлы җыела. **998.** Абсолют җыела. **999.** Шартлы җыела. **1000.** $p > 1$ булганда, абсолют җыела; $0 \leq p \leq 1$ булганда, шартлы җыела. **1002.** Шартлы җыела. **1003.** $p > 1$ булганда, абсолют җыела; $\frac{1}{2} < p < 1$ булганда, шартлы җыела.

XIV бүлек

1004. $|x| > 1$ булганда, абсолют җыела. **1005.** $x > 0$ булганда, абсолют җыела; $x = 0$ булганда, шартлы җыела. **1006.** $x > -\frac{1}{3}$ һәм $x < -1$ булганда, абсолют җыела. **1007.** $x \neq 1$ булганда, абсолют җыела; $x = -1$ булганда, шартлы җыела. **1008.** $-\frac{\sqrt{17}-3}{6} < x < \frac{1}{3}$ һәм $\frac{2}{3} < x < \frac{\sqrt{17}+3}{6}$ булганда, абсолют җыела. **1009.** $|x - \pi k| \leq \frac{\pi}{6}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ булганда, абсолют җыела. **1010.** $|x| < 1$ булганда, абсолют җыела. **1011.** $|x| < 1$ булганда, абсолют җыела. **1012.** $|x| \neq 1$ булганда, абсолют җыела. **1013.** $x \neq -1$ булганда, абсолют җыела. **1014.** $x > 0$ булганда, абсолют җыела. **1015.** Әгәр $|a| > 1$ булса, $0 < |x| < +\infty$ булганда, абсолют җыела; $|a| \leq 1$ һәм $x = 0$ булса таркала. **1016.** $x = 2$ һәм $x > e$ булганда, абсолют җыела. **1017.** $x > 1$ булганда, абсолют җыела. **1034.** $R = 1$; $(-1; 1)$; $x = -1$ булганда, $p > 1$ булса, абсолют җыела һәм, $0 < p \leq 1$ булса, шартлы җыела; $x = 1$ булганда, әгәр $p > 1$ булса, абсолют җыела һәм әгәр $p \leq 1$ булса таркала. **1035.** $R = \frac{1}{3}$; $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$; $x = -\frac{4}{3}$ булса, шартлы җыела; $x = -\frac{2}{3}$ булганда таркала. **1036.** $R = 4$; $(-4; 4)$; $x = \pm 4$ булганда таркала. **1037.** $R = +\infty$; $(-\infty, +\infty)$.

1038. $R=\frac{1}{e}$; $x=\pm\frac{1}{e}$ булса, таркала. **1039.** $R=+\infty$; $(-\infty,+\infty)$.

1040. $R=2$; $(-1,3)$; $x=-1$ булганда, әгәр $p>2$ булса, абсолют җыела һәм, әгәр $0<p\le 2$ булса, шартлы җыела; $x=3$ булганда, әгәр $p>2$ булса, абсолют җыела һәм, әгәр $p\le 2$ булса, таркала. **1041.** $R=2^p$; $(-2^p;2^p)$; $x=-2^p$ булганда, әгәр $p>2$ булса, абсолют җыела, һәм, әгәр $p\le 2$ булса, таркала; $x=2^p$ булганда, әгәр $p>2$ булса, абсолют җыела һәм, әгәр $0<p\le 2$, шартлы җыела. **1042.** $R=1$; $(-1;1)$; $x=-1$ булганда, әгәр $m\ge 0$ булса, абсолют җыела һәм, әгәр $m<0$ булса, таркала; $x=1$ булганда, әгәр $m\ge 0$ булса, абсолют җыела һәм, әгәр $-1<m<0$ булса, шартлы җыела. **1043.** $R=\min\left(\frac{1}{a};\frac{1}{b}\right)$; $(-R;R)$; $x=-R$ булганда, әгәр $a\ge b$ булса, шартлы җыела һәм, әгәр $a<b$ булса, абсолют җыела; $x=R$ булганда, әгәр $a\ge b$ булса, таркала, һәм, әгәр $a<b$ булса, абсолют җыела. **1044.** $R=\max(a,b)$; $(-R,R)$; $x=\pm R$ булганда, таркала. **1045.** $R=1$; $(-1;1)$; $x=\pm 1$ булганда, әгәр $a>1$ булса, абсолют җыела һәм, әгәр $a\le 1$ булса, таркала. **1046.** $R=1$; $(-1,1)$; $x=\pm 1$ булганда, абсолют җыела. **1047.** $R=1$; $(-1;1)$; $x=-1$ булганда, шартлы җыела; $x=1$ булганда таркала. **1048.** $R=1$; $(-1;1)$; $x=-1$булганда таркала; $x=1$ булганда, шартлы җыела.

1049. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$; $(|x|<+\infty)$. **1050.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$; $(|x|<+\infty)$.

1051. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$; $(|x|<+\infty)$. **1052.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln^n a}{n!}x^n$; $(|x|<+\infty)$.

1053. $\mu x+\frac{\mu(1^2-\mu^2)}{3!}x^3+\frac{\mu(1^2-\mu^2)(3^2-\mu^2)}{5!}x^5+\ldots$; $(|x|<1)$.

1054. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$; $(|x|<+\infty)$. **1055.** $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$; $(|x|<+\infty)$.

1056. $\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^{2n}-1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$; $(|x|<+\infty)$. **1057.** $\sum_{n=10}^{\infty}x^n$; $(|x|<1)$.

1058. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$; $(|x|<1)$. **1059.** $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!}x^{n+1}$; $\left(-\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2}\right)$.

1060. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$; $(|x|<1)$. **1061.** $\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-(-2)^n\right)x^n$; $\left(|x|<\frac{1}{2}\right)$.

1062. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{6^n}\right)^n x^n$; $(|x|<1)$. **1063.** $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(n+\frac{1-(-1)^n}{2}\right)x^n$; $|x|<1$.

1064. $x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}+x; (-1\le x\le 1)$. **1065.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}; (-1<x<1)$.

1066. $\operatorname{arctg}2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$; $\left(-\frac{1}{4}<x\le\frac{1}{2}\right)$. **1067.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\times$

$\times\frac{x^{2n+1}}{2^n(2n+1)}$; $(|x|<\sqrt{2})$. **1068.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}$; $(|x|\le 1)$.

XV бүлек

1069. $\frac{c_1+c_2}{2}-\frac{2(c_1-c_2)}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}; S(0)=\frac{c_1+c_2}{2}; S(\pm\pi)=\frac{c_1+c_2}{2}$.

1070. $\frac{b-a}{4}\pi-\frac{2(b-a)}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}+(b+a)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}; S(\pm\pi)=$

$=\frac{b-a}{2}$. **1071.** $\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=0}^{\infty}(-1)\frac{\cos nx}{n^2}$, $S(\pm\pi)=\pi^2$. **1072.** $\frac{2}{\pi}sh a\pi\left[\frac{1}{2a}+\right.$

$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2+n^2}(a\cos nx-n\sin nx)\right]$, $S(\pm\pi)=ch\,a\pi$. **1073.** $\frac{2\sin a\pi}{\pi}\times$

$\times\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n\sin nx}{a^2-n^2}$, әгәр $a\notin Z$; $\sin ax$, әгәр $a\in Z$; $S(\pm\pi)=0$.

1074. $\frac{2\sin a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a\cos nx}{a^2-n^2}\right]$; әгәр $a\notin Z$; $\cos ax$, әгәр $a\in Z$;

$S(\pm\pi)=\cos ap$. **1075.** $\frac{2\operatorname{sh}a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n\sin nx}{a^2+n^2}; S(\pm\pi)=0$. **1076.** $\frac{2\operatorname{sh}a\pi}{\pi}\cdot$

$\left[\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a\cos nx}{a^2+n^2}\right]; S(\pm\pi)=\operatorname{ch}a\pi$. **1077.** а) $2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}$;

б) $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$. **1078.** а) $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$; биредә $b_{2k-1}=\frac{2\pi}{2k-1}-$

$-\frac{8}{\pi(2k-1)^2}$, $b_{2k}=-\frac{\pi}{k}$; б) $\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$. **1079.** а) $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[1-\right.$

$\left.-(-1)^n e^{a\pi}\right]\frac{n\sin nx}{a^2+n^2}$; б) $\frac{e^{a\pi}-1}{a\pi}+\frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[(-1)^n e^{a\pi}-1\right]\cos nx}{a^2+n^2}$. **1080.** а) $\frac{2}{\pi}\times$

$\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos\frac{n\pi}{2}}{n} \sin nx$; б) $\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}\cos nx$. **1081.** а) $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \times$ $\times \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}$; б) $\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2(2n-1)x}{(2n-1)^2}$. **1082.** $\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}$. **1083.** $1-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\pi x}{n}$. **1085.** $\frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin\frac{n\pi x}{5}}{n}$. **1086.** а) $\frac{4}{\pi}\times$ $\times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2(n-1)\pi x}{2n-1}$; б) 1. **1087.** а) $\frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin\frac{n\pi x}{l}}{n}$; б) $\frac{l}{2}-\frac{4l}{\pi^2}\times$ $\times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2n-1)\pi x}{l}}{(2n-1)^2}$.

ЭЧТӘЛЕК

Кереш 3

I бүлек

Күплек һәм аның белән гамәлләр 4

II бүлек

Функция һәм аның төп төшенчәсе 7

III бүлек

Эзлеклелек 16

IV бүлек

$y = f(x)$ функциясенең чикләмәсе 25

V бүлек

Функциянең ноктада өзлексезлеге 41

VI бүлек

Чыгарылма һәм дифференциал 49

VII бүлек

Функция үзлекләрен өйрәнгәндә чыгарылманы куллану 67

VIII бүлек

Күп үзгәрешле функция 82

IX бүлек

Аныксыз интеграл 99

X бүлек

Анык интеграл 133

XI бүлек

Кабатлы интеграллар 155

XII бүлек

Кәкресызыклы интеграллар 173

XIII бүлек

Санлы рәтләр 189

XIV бүлек

Функциональ рәтләр 197

XV бүлек

Фурье рәте 208

Җаваплар 213

Учебное издание

Мударисов Ильгиз Хабибуллович
Мухлисов Фоат Габдуллович

СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Учебное пособие для высших учебных заведений

Казань. Татарское книжное издательство. 2013

На татарском языке

Уку-укыту басмасы

Мөдәррисов Илгиз Хәбибулла улы
Мөхлисов Фоат Габдулла улы

МАТЕМАТИК АНАЛИЗДАН
МӘСЬӘЛӘЛӘР ҖЫЕНТЫГЫ

Югары уку йортлары өчен уку ярдәмлеге

Мөхәррире *Л. Х. Мөхәммәтҗанова*
Бизәлеш мөхәррире *Л. Р. Вафина*
Техник мөхәррире һәм
компьютерда биткә салучысы *Г. С. Нуретдинова*
Корректорлары *Г. Г. Мөхәммәтҗанова, Р. Ә. Фәйзуллина*

Оригинал-макеттан басарга кул куелды 29.08.2013.
Форматы 60×84 1/16. Шартлы басма табагы 13,48.
Тиражы 1000 д. Заказ

Безнең китапларны түбәндәге адреслар буенча сатып алырга мөмкин:
Казан, Декабристлар урамы, 2.
Татарстан китап нәшриятының маркетинг бүлеге.
Тел.: (843) 519-45-35.
Казан, Бауман урамы, 29/11.
Татарстан китап нәшриятының фирма кибете.
Тел.: (843) 292-03-18.
Казан, Декабристлар урамы, 2.
Татарстан китап нәшриятының күргәзмә-кибете.
Тел.: (843) 519-45-13.

«Татарстан китап нәшрияты» ДУП.
420111. Казан, Бауман урамы, 19.
Тел./факс (843) 519-45-22.
http://tatkniga.ru; e-mail: info@tatkniga.ru

ИНТЕГРАЛЛАУНЫҢ ТӨП КАГЫЙДӘЛӘРЕ

1. Даими тапкырлаучыны интеграл тамгасы астыннан чыгару:

$$\int C f(x)\, dx = C\int f(x)\, dx.$$

2. Сумманың интегралы интеграллар суммасына тигез:

$$\int (u + v + w)\, dx = \int u\, dx + \int v\, dx + \int w\, dx.$$

3. Алыштырып кую:

әгәр $x = \varphi(t)$ булса, $\int f(x)dx = \int f\left(\varphi(t)\right) \cdot \varphi'(t)dt.$

4. Кисәкләп интеграллау:

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du.$$

ИНТЕГРАЛЛАРНЫҢ ТӨП ТАБЛИЦАСЫ

1. Дәрәҗәле функция:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1), \qquad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

2. Тригонометрик функция:

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C; \qquad \int \operatorname{ctg} x\, dx = \ln|\sin x| + C;$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C; \qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln|\cos x| + C; \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

3. Рациональ вакланмалы функция:

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C;$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C;$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$$

4. Күрсәткечле функция:

$$\int e^x dx = e^x + C; \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

5. Иррациональ функция:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a^2}\right| + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + C.$$

9 785298 025188